MATEMÁTICA
Graduação

Geometria Euclidiana Plana

Manoel Ferreira de Azevedo Filho

UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL
UAB
UFSJ
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO JOÃO DEL-REI
nead
núcleo de educação a distância

Manoel Ferreira de Azevedo Filho

Geometria Euclidiana Plana

2ª Edição
2010

EXPEDIENTE

Design instrucional
Antonio Germano Magalhães Junior
Igor Lima Rodrigues
Pedro Luiz Furquim Jeangros

Projeto gráfico
Rafael Straus Timbó Vasconcelos
Marcos Paulo Rodrigues Nobre

Coordenador Editorial
Rafael Straus Timbó Vasconcelos

Diagramação e Ilustração
Marcos Paulo Rodrigues Nobre

Capa
Emilson Pamplona Rodrigues de Castro

PRESIDENTE DA REPÚBLICA
Luiz Inácio Lula da Silva

MINISTRO DA EDUCAÇÃO
Fernando Haddad

SECRETÁRIO DE EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA
Carlos Eduardo Bielschowsky

DIRETOR DO DEPARTAMENTO DE POLÍTICAS EM EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA – DPEAD
Hélio Chaves Filho

SISTEMA UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL
Celso Costa

GOVERNADOR DO ESTADO DO CEARÁ
Cid Ferreira Gomes

REITOR DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ
Francisco de Assis Moura Araripe

VICE-REITOR
Antônio de Oliveira Gomes Neto

PRÓ-REITORA DE GRADUAÇÃO
Josefa Lineuda da Costa Murta

COORDENADOR DA SECRETARIA DE EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA
Antonio Germano Magalhães Junior

COORDENADOR GERAL UAB/UECE
Francisco Fábio Castelo Branco

COORDENADORA ADJUNTA UAB/UECE
Josete de Oliveira Castelo Branco Sales

COORDENADOR DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA
Cleiton Batista Vasconcelos

COORDENADOR DE TUTORIA E DOCÊNCIA DA LICENCIATURA EM MATEMÁTICA
Gerardo Oliveira Barbosa

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

Este é um trabalho que versa sobre Geometria Euclidiana Plana. A abordagem que apresentamos é totalmente intuitiva. Para compreensão do texto, o leitor não necesitará de conhecimento prévio a não ser o da Matemática Elementar que consta no Ensino Fundamental. A Geometria é tratada de modo informal sem, contudo, perder o rigor que se espera haver num texto matemático. Tivemos a preocupação de selecionarmos para apresentação apenas os teoremas fundamentais da Geometria Euclidiana Plana, acompanhados de suas demonstrações, para não tornar o trabalho muito extenso.

A obra está dividida em dez unidades. As seis primeiras tratam dos conceitos e teoremas básicos da geometria e as quatro restantes abordam sobre a noção de área e as relações métricas nos triângulos, polígonos regulares e circunferência. Algumas notas históricas estão presentes. Quanto aos exercícios, eles foram seqüênciados, no nosso julgamento, pela ordem crescente de dificuldade. Há vários deles que são de complementação da teoria. As respostas são dadas no final do trabalho.

O Autor

Unidade 1

Conceitos Básicos

Objetivos:

- Conhecer os conceitos primitivos e as definições básicas da Geometria Euclidiana Plana.
- Compreender os símbolos e as notações da Teoria dos Conjuntos usados para representar entes geométricos.
- Saber trabalhar com medidas de segmentos de reta e ângulos.

Conceitos Básicos

Muitos e muitos séculos antes de Cristo (a.C.), o homem começou a fazer medidas, comparando as distâncias entre pontos, as formas e as dimensões de objetos. Povos antigos, como os egípcios, os assírios e os babilônicos, já conheciam algumas figuras geométricas e a noção de ângulo, usadas na medida de áreas e na astronomia (ciência que estuda a posição e os movimentos dos astros).

Cerca de 300 anos a.C, um sábio grego, o matemático Euclides, escreveu uma obra notável, dividida em treze livros, conhecida como os Elementos de Euclides. A partir das noções primitivas de ponto, reta, plano e espaço, Euclides, de modo claro, preciso e lógico, estabeleceu os fundamentos da geometria. Tão genial foi a obra de Euclides, que ela conta com mais de mil edições, em línguas diferentes.

Os seis primeiros livros dos Elementos de Euclides tratam da geometria plana elementar, assunto que vamos começar a estudar.

A geometria está sempre presente em nossa vida, no nosso dia-a-dia. Em tudo, nas brincadeiras, nos brinquedos, nos esportes, nos objetos, nos aparelhos, em nossa roupa, nas moedas, na bandeira nacional, etc. Note_1

PENSE

Pense em mais objetos que contenham formas geométricas

Comecemos pelo mais simples: *o ponto*. Podemos imaginar que um ponto é o pingo da letra i ou um furinho que fazemos com um alfinete numa folha de papel.

Já uma reta é um conjunto de uma infinidade de pontos alinhados e ilimitado em quaisquer de seus dois sentidos. Um cordão que esticamos ou um risco feito numa folha de papel com o auxílio de uma régua podem ser imaginados como uma porção de uma reta.

Usualmente, os pontos são representados por letras maiúsculas: *A, B, C, D, ...* e as retas por letras minúsculas: *r, s, t, ...*

Para indicar que um ponto *A* pertence a uma reta *r*, usaremos a notação $A \in r$. Neste caso, podemos dizer também que a reta *r* passa pelo ponto *A*.

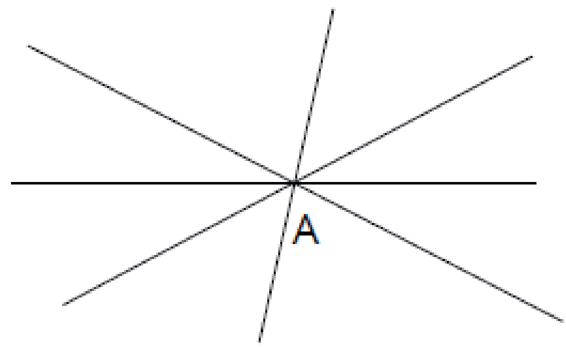
PENSE

Dado um ponto A, quantas retas podem passar por A?

Um *plano* pode ser pensado como sendo a superfície de uma mesa lisa infinita em todas as direções. Uma folha de papel estirada pode ser imaginada como uma porção de um plano.

Para o estudo que vamos realizar, fixaremos, como conjunto universo, um determinado plano, isto é, todos os conjuntos de pontos com os quais trabalharemos, como retas, triângulos e outras figuras geométricas, estarão contidas num mesmo plano, ou seja, serão *coplanares*.

Todos os demais conceitos geométricos são definidos a partir dos conceitos de ponto, reta e plano. É por esse motivo que ponto, reta e plano são chamados de *conceitos primitivos* da geometria. Tecnicamente falando, esses conceitos não têm definição, são apenas perceptíveis.



Tantas quantas a gente desejar, não é mesmo?

PENSE

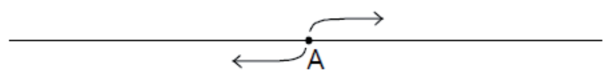
Por dois pontos distintos A e B, quantas retas podemos traçar?

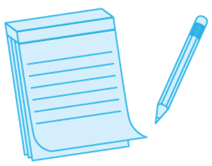
Você acertou. Realmente, é só uma linha reta. Por conseguinte, dois pontos distintos determinam uma única linha reta.

A reta *r* que passa pelos pontos distintos *A* e *B* também pode ser denotada por $\overleftrightarrow{AB}$.

1.1. Semi-Reta

Considere uma linha reta *r* e um ponto $A \in r$.





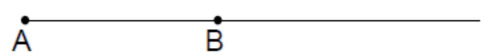
ANOTE

Note que esse ponto A determina dois subconjuntos de r: um constituído dos pontos que ficam a um mesmo lado de A e o outro formado pelos pontos que ficam do outro lado de A

Qualquer um desses subconjuntos mais o ponto *A* chama-se *semi-reta* de origem *A*.

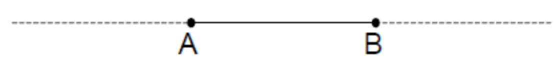
Por conseguinte, um ponto *A* pertencente a uma reta *r* determina duas semi-retas, de origem *A*, as quais são chamadas de *semi-retas opostas*.

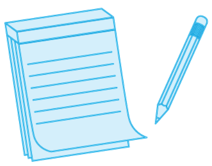
Se *B* é um ponto qualquer de uma semi-reta de origem *A*, diferente de *A*, denotaremos esta semi-reta por $\overrightarrow{AB}$.



1.2. Segmento de Reta

Definição 1: *Sejam A e B dois pontos distintos. Chama-se segmeto de reta de extremidades A e B, o conjunto de todos os pontos da reta* $\overleftrightarrow{AB}$ *situados entre A e B, incluindo-se também os pontos A e B.*



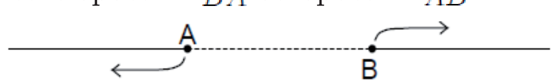


ANOTE

Note que
$\overline{AB} = \overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA}$

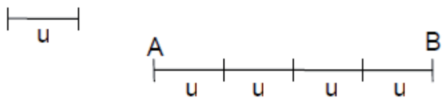
Representaremos por $\overline{AB}$ o segmento de reta de extremidades *A* e *B*.

Chamaremos de prolongamento de um segmento de reta $\overline{AB}$, qualquer uma das semi-retas oposta a $\overrightarrow{BA}$ ou oposta a $\overrightarrow{AB}$.



Medida de um Segmento

Fixando-se, arbitrariamente, um segmento de reta *u*, entende-se por *medida de um segmento de reta* $\overline{AB}$ ou o *comprimento* de $\overline{AB}$ ou *distância* do ponto *A* ao ponto *B*, o número (inteiro ou não) de vezes, que esse segmento fixado, que é chamado de unidade de comprimento (u.c.), cabe em $\overline{AB}$



A unidade de comprimento padrão chama-se *metro*. O metro é igual à distância entre duas linhas paralelas existentes num protótipo fabricado com platina e irídio e encontra-se depositado em Paris a uma temperatura de zero grau centígrado.

O metro possui múltiplos e submúltiplos como unidade de comprimento. Veja a seguinte tabela:

	Unidade	Abreviatura	Valor
Múltiplos	quilômetro	km	1000m
	hectômetro	hm	100m
	decâmetro	dam	10m
Padrão	metro	m	1m
Submúltiplos	decímetro	dm	1/10m
	centímetro	cm	1/100m
	milímetro	mm	1/1000m

ATENÇÃO

Por exemplo, na figura ao lado, a medida de $\overline{AB}$ é igual a 4 u.c.

Há outras unidades de medida de comprimento usadas em nosso dia-a-dia: uma polegada equivale a 2,54cm e uma légua equivale a 6km.

Denotaremos por *AB* a medida de um segmento $\overline{AB}$.

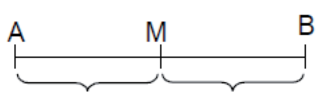
Diremos que dois segmentos de reta são *congruentes* se eles têm a mesma medida.

Usaremos a notação $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ para indicar que dois segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são congruentes.

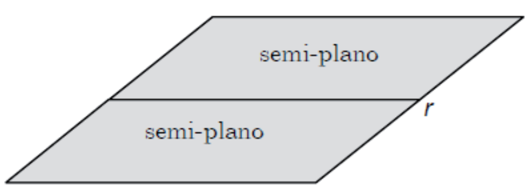
PENSE

Você sabe quanto vale uma polegada?
E uma légua?'

Chama-se *ponto médio* de um segmento $\overline{AB}$ o ponto *M* pertencente ao segmento $\overline{AB}$ situado a uma igual distância dos extremos *A* e *B*. Conseqüentemente, o ponto médio de um segmento o divide em dois segmentos congruentes.



1.3. Semi-Plano

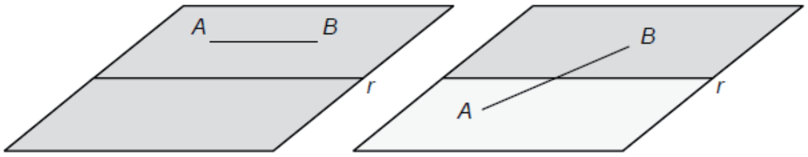


Toda reta *r* separa o plano em duas regiões: uma constituída dos pontos que se situam a um mesmo lado da linha reta *r* e a outra formada pelos pontos que se localizam no outro lado da linha reta *r*.

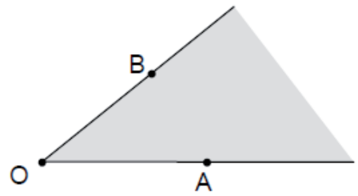
ANOTE

Note que dois pontos distintos A e B não pertencentes à linha reta r se situam num mesmo semi-plano se $\overline{AB}$ não intercepta r e se situam em semi-planos opostos se $\overline{AB}$ intercepta r.

Qualquer uma dessas regiões mais a reta r chama-se *semi-plano* determinado por r. Por conseguinte, toda reta r determina dois semi-planos, os quais são chamados de *semi-planos opostos* em relação à reta.



1.4. Ângulo

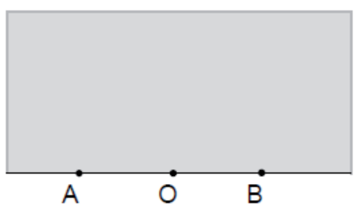


Definição 2: Chama-se *ângulo* a abertura que duas semi-retas de mesma origem fazem no plano.

Se as semi-retas que formam o ângulo são $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, representaremos o ângulo por $A\hat{O}B$ ou simplesmente por $\hat{O}$.

As semi-retas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ são chamadas de lados e O de vértice do ângulo $A\hat{O}B$.

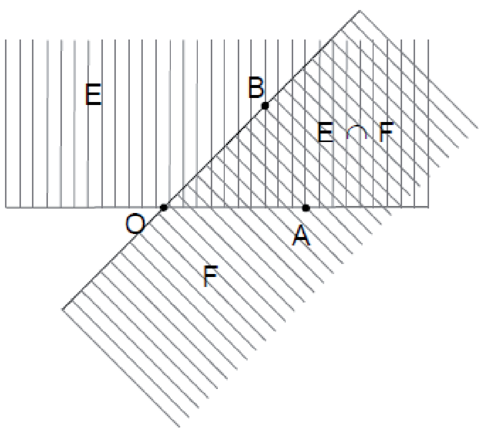
Um ângulo $A\hat{O}B$ chama-se *raso* se seus lados são semi-retas opostas.



PENSE

Temos: $A\hat{O}B = E \cap F$. Concorda?

Um ângulo $A\hat{O}B$ chama-se *nulo* se seus lados são semi-retas coincidentes.

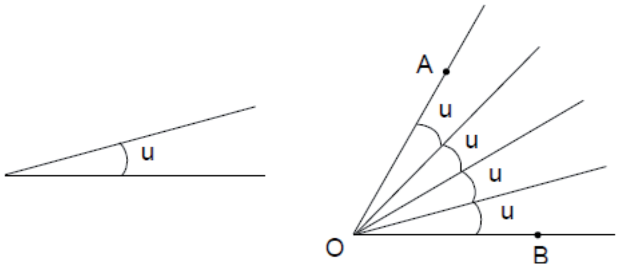


Seja $A\hat{O}B$ um ângulo tal que seus lados não sejam colineares, isto é, não estejam contidos numa mesma linha reta. Indiquemos por E o semi-plano determinado por $\overleftrightarrow{OA}$ que contém B e por F o semi-plano determinado por $\overleftrightarrow{OB}$ que contém A.

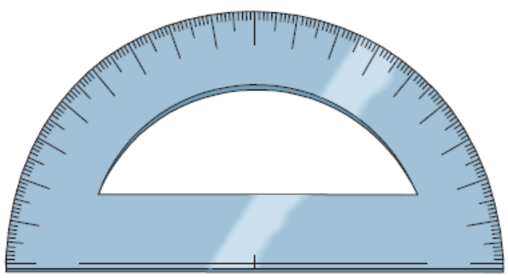
Medida de Ângulo

Fixando-se arbitrariamente um ângulo u, entende-se por *medida de um ângulo* $A\hat{O}B$ o número (inteiro ou não) de vezes, que esse ângulo fixado, que é chamado de unidade de medida de ângulo (u.m.a.), cabe em $A\hat{O}B$.

Por exemplo, na figura a seguir, a medida de $A\hat{O}B$ é igual a 4 u.m.a.



Uma unidade de medida de ângulo muito empregada e que adotaremos daqui por diante chama-se *grau*. Ela é obtida quando dividimos o ângulo raso em 180 partes iguais. O grau é, portanto, aquela unidade de medida que cabe exatamente 180 vezes no ângulo raso.



Adotaremos a notação 180º para indicar 180 graus. Assim como, usaremos 60º para denotar 60 graus. Enfim, empregaremos a notação a^{o} para representar a graus.

Sendo assim, todo ângulo raso mede 180º.

O aparelho desenhado a seguir chama-se transferidor e se presta a calcular medida de ângulos.

Representaremos por $|A\hat{O}B|$ a medida de um ângulo AÔB.

O grau possui submúltiplos como unidade de medida de ângulo. Ei-los: o *minuto* e o *segundo* de um grau.

Um minuto de um grau é a sexagésima parte de um grau, ou seja, um grau contém exatamente 60 minutos. Um segundo, por sua vez, é a sexagésima parte de um minuto, isto é, cada minuto equivale a 60 segundos.

Para representar a minutos usa-se a notação a' e para denotar a segundos a notação a''. Utilizando esta simbologia, temos:

$$1^{o} = 60'$$
$$1' = 60''$$

Diremos que dois ângulos $A\hat{O}B$ e $A_1\hat{O}_1B_1$ são *congruentes* se têm a mesma medida. Adotaremos a notação $A\hat{O}B = A_1\hat{O}_1B_1$ para indicar que os ângulos $A\hat{O}B$ e $A_1\hat{O}_1B_1$ são congruentes.

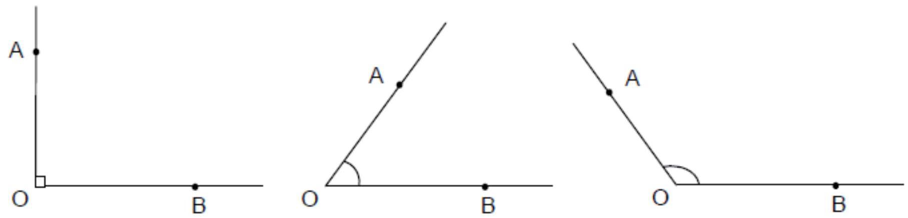
Chamaremos de ângulo *reto*, *agudo* ou *obtuso* todo ângulo conforme sua medida seja igual, menor ou maior do que 90º.

PENSE

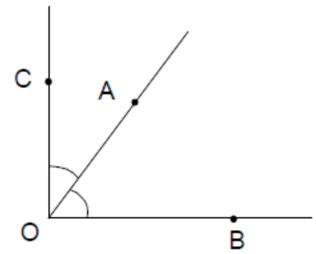
Você sabe utilizar um transferidor Se não, tente descobrir como.

PENSE

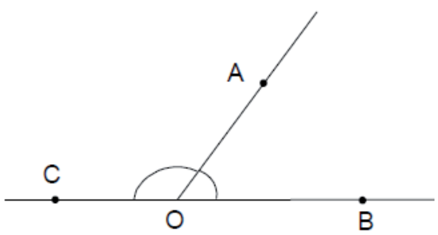
Por conseguinte, um grau corresponde a 3600 segundos. De Acordo?

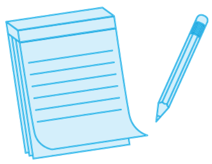


Diremos que dois ângulos são *complementares* se a soma de suas medidas é igual a 90°. Neste caso, diremos ainda que um é *complemento* do outro.



Diremos que dois ângulos são *suplementares* se a soma de suas medidas é igual a 180°. Neste caso, diremos ainda que um é *suplemento* do outro.



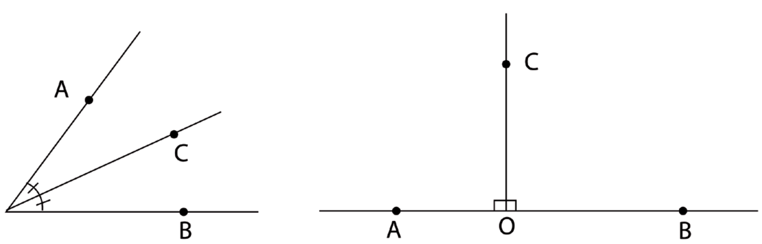


ANOTE

Por exemplo, a bissetriz de um ângulo raso o divide em dois ângulos retos.

Bissetriz de um Ângulo

Definição 3 Chama-se bissetriz de um ângulo $A\hat{O}B$ a semi-reta $\overrightarrow{OC}$, situada entre $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ que divide o ângulo $A\hat{O}B$ em dois ângulos congruentes.

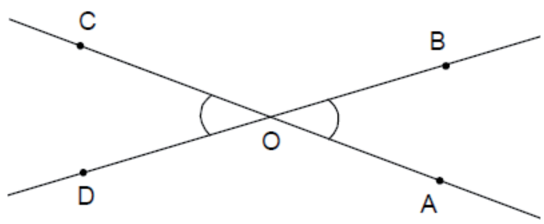


ATENÇÃO

Na figura ao lado, os ângulos $A\hat{O}B$ e $C\hat{O}D$ são o.p.v., assim como $B\hat{O}C$ e $A\hat{O}D$.

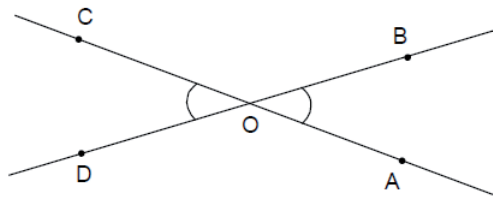
Ângulos Opostos pelo Vértice

Dois ângulos não rasos são ditos *opostos pelo vértice* (o.p.v.) se os lados de um são as semi-retas opostas aos lados do outro.



Teorema 4: *Dois ângulos opostos pelo vértice são sempre congruentes.*

Prova.



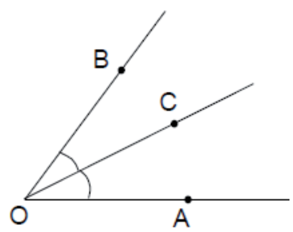
Na figura, temos que:

$$\begin{cases} |A\hat{O}B| + |B\hat{O}C| = 180^\circ \\ |C\hat{O}D| + |B\hat{O}C| = 180^\circ \end{cases}$$

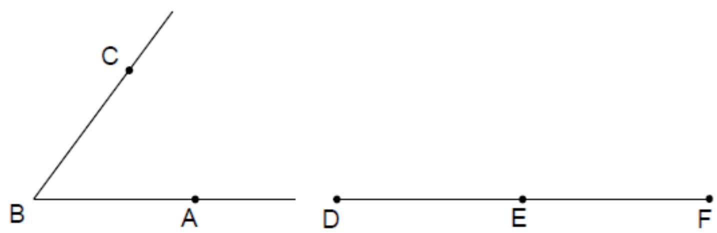
Daí, resulta que $|A\hat{O}B| + |B\hat{O}C| = |C\hat{O}D| + |B\hat{O}C|$. Cancelando-se $|B\hat{O}C|$ em ambos os membros, decorre que $|A\hat{O}B| = |C\hat{O}D|$.

Em matemática, chamamos de *teorema* toda propriedade passível de uma prova, uma demonstração, como esta que acabamos de apresentar.

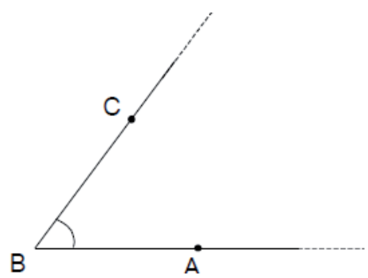
Seja $|A\hat{O}B|$ um ângulo qualquer. Se $\overrightarrow{OC}$ é uma semi-reta que está situada entre $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, diremos que os ângulos $A\hat{O}C$ e $C\hat{O}B$ são *adjacentes* ou *consecutivos*.



Diremos que dois segmentos de reta são *adjacentes* ou *consecutivos* quando eles têm, como interseção, apenas um extremo comum.



Note que dois segmentos adjacentes $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ quaisquer determinam um ângulo, a saber: aquele formado pelas semi-retas $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{BC}$.



ANOTE

Os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são adjacentes, assim como $\overline{DE}$ e $\overline{EF}$. Já os segmentos $\overline{DE}$ e $\overline{DF}$ não são

SÍNTESE DA UNIDADE

Nesta unidade, estabelecemos os conceitos primitivos de ponto, reta e plano e demos as definições de semi-reta, segmento de reta, medida de segmento de reta, ponto médio de um segmento de reta, semi-plano, ângulo, medida de ângulo, bissetriz de um ângulo, ângulos opostos pelo vértice, entre outros.

ATIVIDADES DE AVALIAÇÃO

1. Sejam A, B e C três pontos distintos e não alinhados. Quantos segmentos de reta podem ser obtidos com extremos nesses pontos? Faça um desenho.
2. Marque sobre uma linha reta r quatro pontos distintos A, B, C e D de modo que as semi-retas $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{BD}$ tenham interseção vazia.
3. Marque sobre uma linha reta r quatro pontos distintos A, B, C e D de modo que as semi-retas $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{BD}$ tenham interseção não vazia.
4. Marque sobre uma linha reta r três pontos distintos A, B e C, nesta ordem. Determine: a) $\overline{AB} \cap \overline{AC}$; b) $\overline{AB} \cup \overline{AC}$; c) $\overline{AC} \cap \overline{BC}$; d) $\overline{AB} \cap \overline{BC}$.
5. Marque sobre uma linha reta r três pontos distintos A, B e C tais que AB = 5cm e AC = 4cm. O que pode ser $\overline{AB} \cap \overline{AC}$ e $\overline{AB} \cup \overline{AC}$?
6. Um ângulo mais sua metade mede 52º. Quanto vale sua medida?
7. Um ângulo mais o dobro de seu complemento vale 130º. Qual é sua medida?
8. A semi-soma entre o triplo de um ângulo e 20º, menos 2/5 do mesmo ângulo resulta na medida desse ângulo mais 15º. Qual é sua medida?
9. De um ângulo tira-se sua terça parte e depois a metade do suplemento do que restou e obtém-se 20º. Quanto vale sua medida?
10. Determine a medida de dois ângulos adjacentes sabendo que um é o dobro do outro e o ângulo formado por suas bissetrizes mede 30º.
11. Determine a medida de dois ângulos adjacentes, sabendo que um é o triplo do outro e o ângulo formado por suas bissetrizes mede 20º.
12. Quantas retas são determinadas por 5 pontos três a três não colineares?
13. Quantas retas são determinadas por n pontos três a três não colineares?
14. A que horas, imediatamente após o meio-dia, os ponteiros de um relógio formam 110º?
15. Demonstre que complementos de ângulos congruentes são também congruentes.
16. Demonstre que suplementos de ângulos congruentes são também congruentes.

17. Demonstre que as bissetrizes de dois ângulos opostos pelo vértice formam um ângulo raso.

18. Sejam $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OA'}$ semi-retas opostas e $B \notin \overleftrightarrow{AA'}$. Demonstre que as bissetrizes de AÔB e A'ÔB formam um ângulo reto.

19. Sejam A, B e C pontos distintos pertencentes a uma reta r, nesta ordem. Sejam M e N, respectivamente, os pontos médios de $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$. Demonstre que

$$MN = \frac{AB + BC}{2}$$

20. Sejam A, B e C pontos distintos pertencentes a uma mesma linha reta, nesta ordem. Seja M o ponto médio de $\overline{AB}$. Demonstre que

$$CM = \frac{AC + BC}{2}$$

21. Sejam A, B e C pontos distintos e colineares (isto é, pertencentes a uma mesma linha reta), nesta ordem. Seja M o ponto médio de $\overline{AC}$ e suponha que $AB > BC$. Demonstre que

$$BM = \frac{AB - BC}{2}$$

Unidade 2

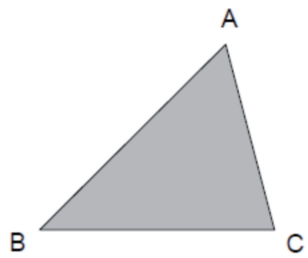
Triângulo

Objetivos:

- Saber definir triângulo e reconhecê-los quanto aos lados e quanto aos ângulos.
- Saber utilizar as desigualdades dos triângulos.
- Compreender o conceito de triângulos congruentes.
- Saber aplicar os casos de congruência de triângulos.

Definição

Definição 5: *Chamaremos de triângulo ou de trilátero a região do plano limitada por 3 segmentos de reta* $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$*, em que os pontos A, B e C não são colineares.*

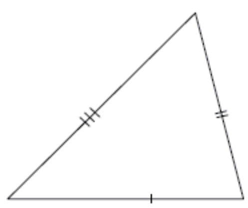


Adotaremos a notação *ABC* para representar o triângulo determinado pelos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$.

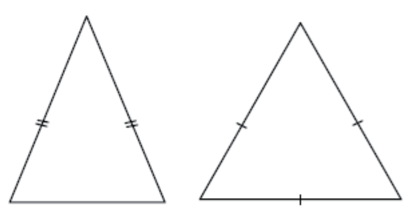
Chama-se *lado* de um triângulo *ABC* qualquer um dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ ou $\overline{CA}$; *ângulo interno* ou simplesmente *ângulo* do triângulo *ABC* qualquer um dos ângulos $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ ou $\widehat{C}$ e *vértice* qualquer um dos pontos *A*, *B* ou *C*.

Chamaremos de *perímetro* de um triângulo a soma das medidas de seus lados.

Um triângulo chama-se ***escaleno*** se as medidas de seus lados são desiguais.



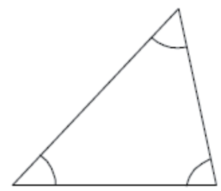
Caso contrário, ou seja, se o triângulo tiver pelo menos dois lados congruentes, diremos que ele é ***isósceles***.



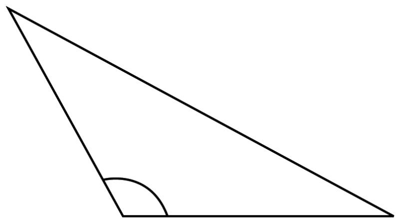
Caso os três lados tenham a mesma medida, diremos que é ***equilátero***.

Chamaremos de triângulo ***equiângulo*** todo aquele que tem os ângulos com a mesma medida.

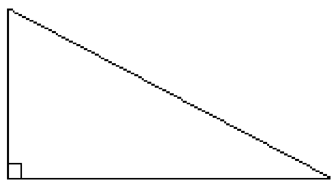
Um triângulo chama-se ***acutângulo*** se todos os seus ângulos internos são agudos.



Um triângulo chama-se ***obtusângulo*** se algum de seus ângulos internos é obtuso.



Um triângulo chama-se *retângulo* se um de seus ângulos internos é reto.

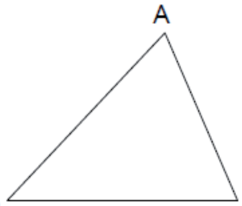


Num triângulo retângulo os lados que formam o ângulo reto são chamados de *catetos* e o terceiro de *hipotenusa*.

Num triângulo, um vértice e um lado são ditos *opostos* se o vértice não é extremidade do lado.

ANOTE

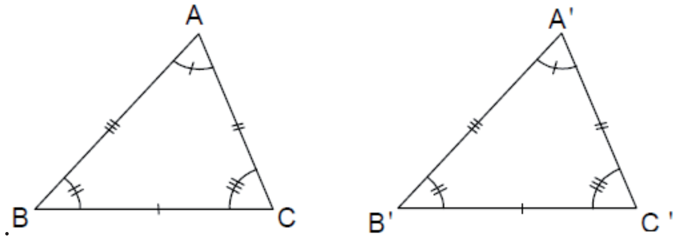
No triângulo ao lado, A e $\overline{BC}$ são opostos, assim como B e $\overline{AC}$, e, C e $\overline{AB}$.



Num triângulo, um ângulo e um lado são ditos *opostos* se o vértice do ângulo e o lado forem opostos. No triângulo *ABC*, são opostos: $\hat{A}$ e $\overline{BC}$, $\widehat{B}$ e $\overline{AC}$, e, $\widehat{C}$ e $\overline{AB}$Caso contrário, isto é, se o vértice do ângulo for extremidade do lado, eles são chamados de *adjacentes*. Por exemplo, $\hat{A}$ e $\widehat{A}$ e $\overline{AB}$são adjacentes, assim como $\widehat{C}$ e $\overline{AC}$.

2.1. Caso L.A.L. de congruência de triângulos

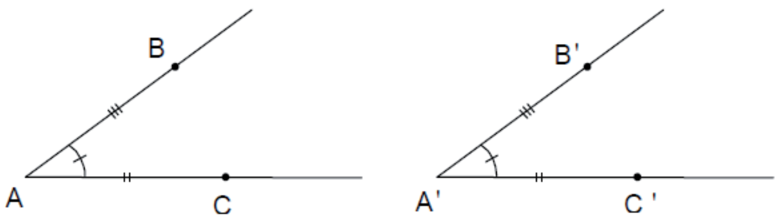
Definição 6: *Dois triângulos ABC e A'B'C' são ditos congruentes e escrevemos ABC ≡ A'B'C' se* $\widehat{A} \equiv \widehat{A'}$. $\widehat{B} \equiv \widehat{B'}$. $\widehat{C} \equiv \widehat{C'}$. $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$, $\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$ *e* $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$



Dizer que dois triângulos são congruentes, significa que é possível estabelecer uma correspondência entre os vértices de um e os vértices do outro de tal forma que ângulos correspondentes são congruentes e lados correspondentes são também congruentes.

Faça a seguinte experiência com o auxílio de uma régua e um transferidor; Escolha uma medida de ângulo qualquer no transferidor. Desenhe agora dois ângulos com essa mesma medida em locais distintos numa folha de papel. Em seguida, escolha duas medidas de qualquer comprimento na régua. Marque cada medida em cada lado de um dos ângulos a partir do vértice. Depois faça o mesmo com o outro ângulo.

A essa altura seus desenhos estarão mais ou menos assim:



Agora, em cada ângulo ligue os dois pontos que você marcou e recorte os triângulos *ABC* e *A'B'C'* de sua folha de papel. Em seguida, tente pôr um sobre o outro de modo a ficarem coincidentes.

Desta experiência podemos concluir que:

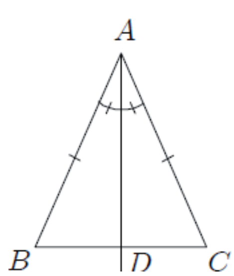
Para que dois triângulos sejam congruentes basta que dois lados de um sejam, respectivamente, congruentes a dois lados do outro e os ângulos formados por esses lados sejam também congruentes.

Em símbolos, temos:

$$\overline{AB} \equiv \overline{A'B'},\ \overline{AC} \equiv \overline{A'C'} \text{ e } \widehat{A} \equiv \widehat{A'} \Rightarrow ABC \equiv A'B'C'$$

Teorema 7 (do triângulo isósceles) Num triângulo, ângulos opostos a lados congruentes são também congruentes.

Prova. Seja *ABC* um triângulo em que AB = AC. Devemos mostrar que $\widehat{B} \equiv \widehat{C}$. Considere a bissetriz do ângulo Â. Esta intercepta $\overline{BC}$ num ponto *D*.



Pelo caso L.A.L., podemos concluir que ABD ≡ ACD, logo, $\widehat{B} \equiv \widehat{C}$.

SAIBA MAIS

Se dois triângulos são congruentes, podemos imaginar que um, através de um deslocamento, pode ser colocado sobre o outro de modo a ficarem coincidentes.

ANOTE

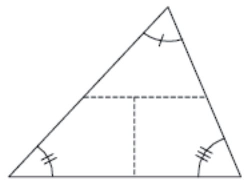
Este é o chamado caso lado-ângulo-lado (obreviado por L.A.L.) de congruência de triângulos.

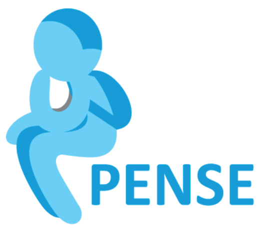
PENSE

Conclua, à luz do teorema anterior, que os ângulos de um triângulo equilátero são congruentes entre si.

2.2. Soma dos ângulos de um triângulo

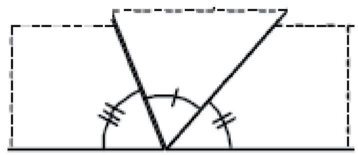
Vamos agora fazer uma experiência para determinamos quanto vale a soma dos ângulos internos de um triângulo. Desenhe numa folha um triângulo como este a seguir:





O que você conclui?

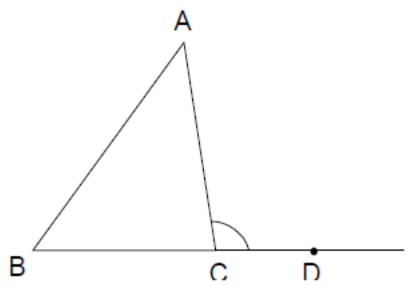
Depois recorte o triângulo e o corte seguindo as linhas pontilhadas. Agora junte os ângulos do triângulo conforme mostramos a seguir.



É isso aí! A soma dos ângulos internos é igual a 180º.

Agora, posto que os ângulos de um triângulo equilátero têm a mesma medida, decorre que cada um vale 60º.

Chamaremos de ângulo externo de um triângulo ABC qualquer ângulo formado por um lado e o prolongamento de outro.



Observe: o ângulo externo $\widehat{C}$ é adjacente ao ângulo interno $\widehat{C}$. Os outros dois ângulos internos, $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$, não são adjacentes ao ângulo $\widehat{C}$.

Uma propriedade interessante sobre ângulo externo de um triângulo é a seguinte: *À medida de um ângulo externo é sempre igual à soma das medidas dos ângulos internos a ele não adjacentes.*

Vejamos por que acontece. Sabemos que a soma dos ângulos internos é igual a 180º, isto é:

$\widehat{A}| + |\widehat{B}| + |\widehat{C}| = 180^o$. Também é igual a 180º a medida do ângulo externo $\widehat{C}$ mais a medida do interno $\widehat{C}$, ou seja: $|A\widehat{C}D| + |\widehat{C}| = 180^o$.

Daí, segue-se que

$$|A\widehat{C}D| + |\widehat{C}| = |\widehat{A}| + |\widehat{B}| + |\widehat{C}|$$

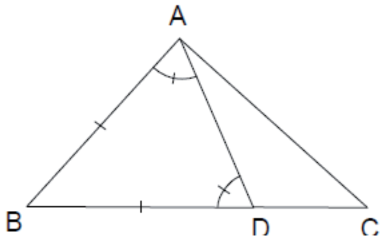
Cancelando-se $|\widehat{C}|$ membro a membro, obtém-se:

$$|A\widehat{C}D| = |\widehat{A}| + |\widehat{B}|$$

Por exemplo, na figura anterior, a medida do ângulo externo $\widehat{C}$ é igual à soma dos internos $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$. Uma consequência deste resultado é a seguinte: Num triângulo, todo ângulo externo é maior do que qualquer ângulo interno a ele não adjacente.

Teorema 8 Se, num triângulo, um lado é menor do que outro, então a medida do ângulo oposto ao primeiro lado é menor do que a medida do ângulo oposto ao segundo.

Prova. Seja *ABC* um triângulo, em que AB < BC. Provaremos que $|\widehat{C}| < |\widehat{A}|$. Com efeito, seja *D* um ponto entre *B* e *C* tal que BA = BD.

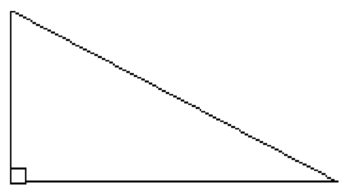


Considere o triângulo isósceles *ABD*. Pelo Teorema do triângulo isósceles, segue-se que $B\widehat{A}D \equiv B\widehat{D}A$. Como $B\widehat{D}A$ é um ângulo externo do triângulo *ADC* e $\widehat{C}$ é um ângulo interno não adjacente a $B\widehat{D}A$, decorre que $|B\widehat{D}A| > |\widehat{C}|$. Desde que $|\widehat{C}| < |B\widehat{D}A| = |B\widehat{A}D| < |\widehat{A}|$, vem que $|\widehat{C}| < |\widehat{A}|$.

É também conseqüência do teorema imediatamente anterior, a recíproca do Teorema do triângulo isósceles, ou seja, num triângulo, lados opostos a ângulos congruentes são também congruentes.

Conclusão: um triângulo só é isósceles se possui dois ângulos congruentes.

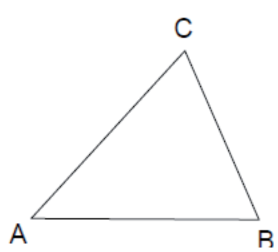
Podemos concluir ainda que num triângulo retângulo a hipotenusa é seu maior lado. De acordo?



Considere agora dois pontos distintos *A* e *B* no plano:

Muito bem! Você acertou. É realmente dado pelo segmento de reta com extremidades nos pontos *A* e *B*.

Por exemplo, a trajetória que apresentamos a seguir (partindo de *A* até *B* passando por *C*) é mais comprida do que a medida de $\overline{AB}$.



Assim sendo, podemos concluir que, num triângulo, a medida de um lado qualquer é sempre menor do que a soma dos outros dois.

ANOTE

Vale também a recíproca deste resultado, isto é, num triângulo, dois ângulos têm medidas desiguais, então ao maior ângulo opõe-se o maior lado. A título de exercício, use os dois teoremas anteriores para demonstrar essa recíproca.

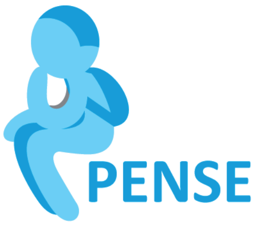
ANOTE

Conclua também que todo triângulo equiângulo é equilátero.

Esse resultado é conhecido como desigualdade triangular.

É possível construir um triângulo de lados 1, 2 e 3?

Com o auxílio de uma régua e um compasso tente construir um.



Como foi? Conseguiu? Certamente não. Explique por quê.

2.3. Outros casos de congruência de triângulos

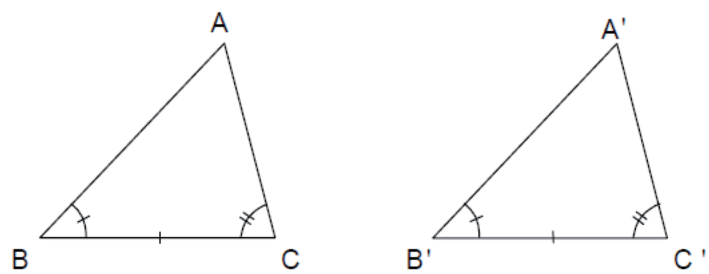
Vimos, através de uma experiência, que para dois triângulos serem congruentes basta que dois lados de um sejam, respectivamente, congruentes a dois lados do outro e os ângulos formados por esses lados sejam também congruentes.

Este é o caso L. A. L. de congruência de triângulos. O qual diz ser suficiente a respectiva congruência desses três elementos (dois lados e o ângulo formado por eles) em cada triângulo para se ter a respectiva congruência dos outros três elementos (um lado e dois ângulos adjacentes a esse lado) em cada triângulo, enfim, a congruência dos dois triângulos.

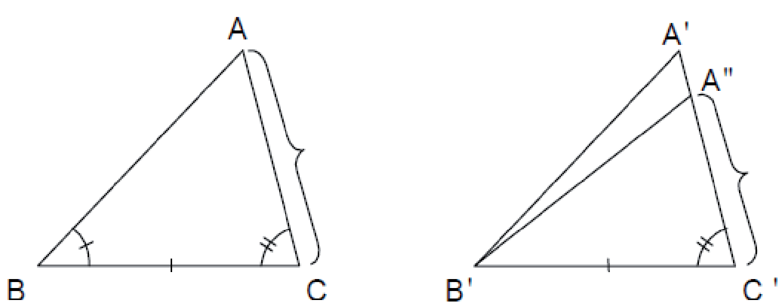
Este não é o único caso de congruência de triângulos. Há mais casos que veremos a seguir, formulados por teoremas.

Teorema 9 (Caso ângulo-lado-ângulo (A.L.A.): Para que dois triângulos sejam congruentes basta que em cada triângulo haja dois ângulos e o lado adjacente a esses ângulos, respectivamente, congruentes.

Em símbolos, $ABC \equiv A'B'C'$ *se* $\widehat{B} \equiv \widehat{B'}$. $\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$ *e* $\widehat{C} \equiv \widehat{C'}$



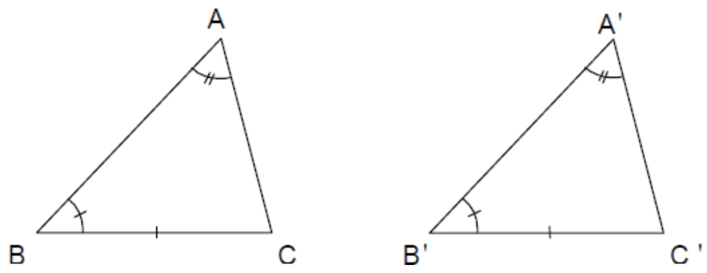
Prova: Pelo caso L. A. L. , basta provarmos que *AC* = *A'C'*. Para isso, mostraremos que não é possível *AC* ≠*A'C'*. Veja bem, se o fosse teríamos *AC* < *A'C'* ou *AC* > *A'C'* ou . Digamos que *AC* < *A'C'*. O caso *AC* > *A'C'* seria discutido de modo análogo. Omitiremo-lo. Seja A"entre A' e C' tal que C'A" = CA.



Pelo caso L. A. L. , decorre que ABC ≡ A"B'C', donde $C'\widehat{B'}A'' \equiv \widehat{B}$. Mas, $\widehat{B} \equiv C'\widehat{B'}A'$ e daí $C'\widehat{B'}A'' \equiv C'\widehat{B'}A'$. Isto é um absurdo, pois $|C'\widehat{B'}A''| < |C'\widehat{B'}A'|$. Conclusão: se ocorresse *AC* < *A'C'* chegaríamos a essa contradição. Logo, não pode acontecer *AC* < *A'C'*. Nem tampouco *AC* > *A'C'*. Portanto, só há uma saída: *AC* = *A'C'*.

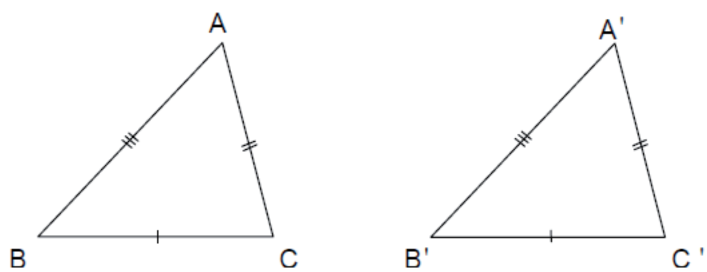
Teorema 10: (Caso lado-ângulo-ângulo oposto (L. A. Ao.)) Para que dois triângulos sejam congruentes basta que em cada triângulo haja um lado, um ângulo adjacente e o ângulo oposto a esse lado, respectivamente, congruentes.

Em símbolos, $ABC \equiv A'B'C'$ *se* $\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$. $\widehat{B} \equiv \widehat{B'}$ *e* $\widehat{A} \equiv \widehat{A'}$.

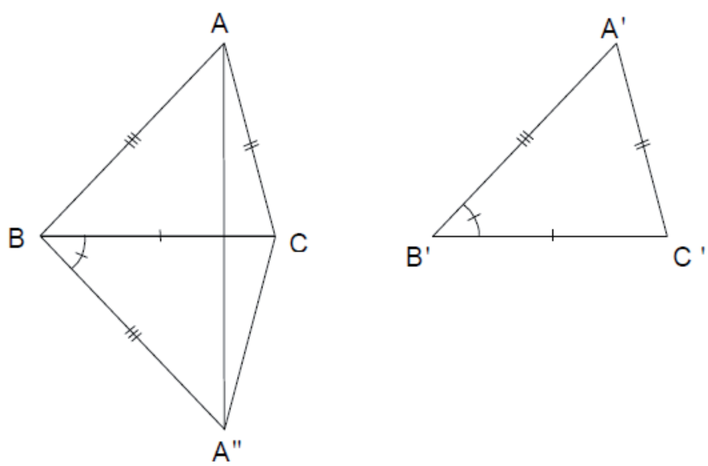


Prova: Sabemos que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180o. Assim sendo, temos: $|\widehat{C}| = 180^\circ - (|\widehat{A}| + |\widehat{B}|) = 180^\circ - (|\widehat{A'}| + |\widehat{B'}|) = |\widehat{C'}|$. Daí, $\widehat{C} \equiv \widehat{C'}$. Pelo caso A. L. A. , segue-se que ABC ≡ A’B’C’.

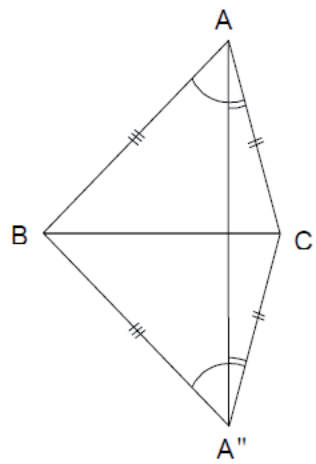
Teorema 11: (Caso lado-lado-lado (L. L. L.)) Para que dois triângulos sejam congruentes basta que os lados de um sejam, respectivamente, congruentes aos lados do outro. Em símbolos, *ABC* ≡ *A’B’C’* se $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$. $\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$ *e* $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$.



Prova: Considere a semi-reta $\overrightarrow{BA''}$ contida no semi-plano determinado por $\overleftrightarrow{BC}$ não contendo *A* de tal sorte que $C\widehat{B}A'' \equiv \widehat{B'}$ e *BA” = B’C’*.

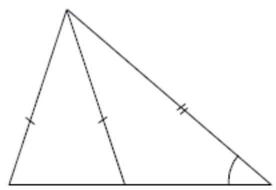


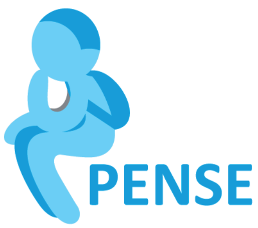
Pelo caso L.A.L., decorre que *A”BC* ≡ *A’B’C’*. Daí, temos que *CA” = C’A’*. Assim, os triângulos *ABA” e ACA”* são isósceles.



Pelo Teorema do triângulo isósceles, segue-se que $A''\hat{A}C \equiv A\hat{A}''C$ e $A''\hat{A}B \equiv A\hat{A}''B$. Desse modo, os ângulos $B\hat{A}C$ e $B\hat{A}''C$ são congruentes. Por conseguinte, pelo caso L. A. L., $ABC \equiv A''BC$. Como $A''BC \equiv A'B'C'$, vem que $ABC \equiv A'B'C'$.

Atente para a figura a seguir e tire suas conclusões.

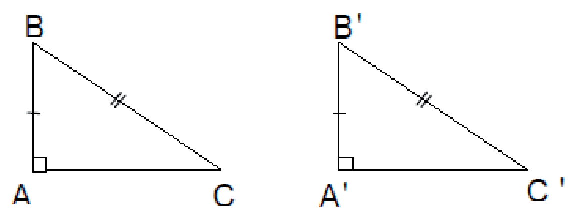




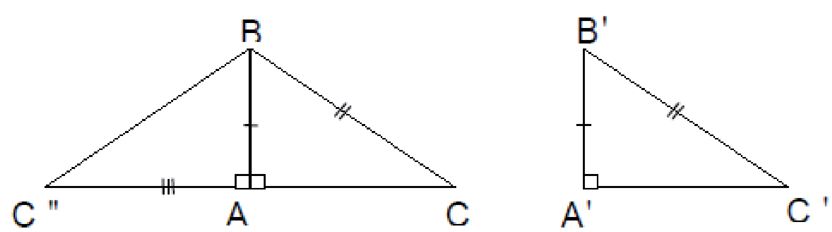
Será A.L.L. um caso de congruência de triângulos?

É isso mesmo, A. L. L. não constitui um caso de congruência de triângulos. A não ser que o ângulo seja reto, conforme mostra o próximo teorema.

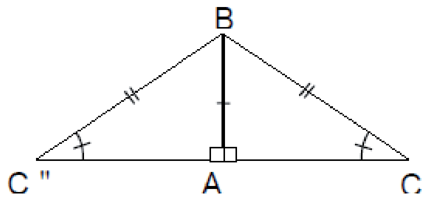
Teorema 12: (Caso ângulo reto-lado-lado (Ar. L. L.)) Para que dois triângulos retângulos sejam congruentes basta que um cateto e a hipotenusa de um sejam, respectivamente, congruentes a um cateto e a hipotenusa do outro. Em símbolos, ABC ≡ A'B'C' se Â e Â' são retos, $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$ e $\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$.



Prova. Seja $\overrightarrow{AC''}$ a semi-reta oposta a $\overrightarrow{AC''}$ tal que AC" = A'C'. Desde que CÂB é reto e BÂC" é seu suplemento, vem que BÂC" é também reto. Assim sendo, ABC" ≡ A'B'C', donde, BC" = B'C'.



Conseqüentemente, o triângulo BCC'' é isósceles e daí $\widehat{C''} \equiv \widehat{C}$.



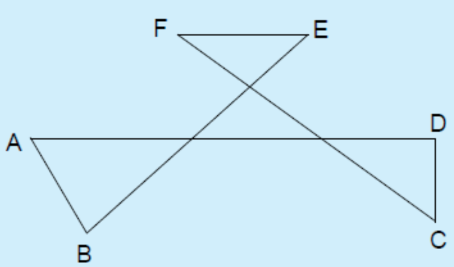
Pelo caso L. A. A_o., segue-se que $ABC \equiv ABC''$. Como $ABC'' \equiv A'B'C'$, decorre que $ABC \equiv A'B'C'$.

SÍNTESE DA UNIDADE

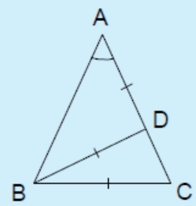
Demos a definição de triângulos. Classificamos os triângulos quanto aos lados e quanto aos ângulos. Definimos triângulos congruentes. Estabelecemos o caso L.A.L. de congruência de triângulos como axioma, os demais são teoremas, os quais foram demonstrados. Estabelecemos também, de maneira intuitiva, que a soma dos ângulos internos de um triângulo vale 180º.

ATIVIDADES DE AVALIAÇÃO

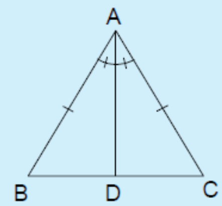
1. É possível construir um triângulo de lados medindo 2cm, 3cm e 5cm?
2. Dois lados de um triângulo isósceles medem, respectivamente, 1 e 2. Determine o terceiro lado.
3. Desenhe, um triângulo de lados medindo 3cm, 4cm e 5cm. (Sugestão: utilize também um compasso.)
4. Desenhe um triângulo de lados medindo 3cm, 5cm e 6cm.
5. Qual é o maior lado de um triângulo obtusângulo?
6. Demonstre que todo lado de um triângulo é maior do que a diferença dos outros dois.
7. Sejam *a*, *b* e *c* números reais, em que $0 < a \leq b \leq c$. Afinal, qual é a condição que se deve impor a *a*, *b* e *c* para que exista um triângulo cujos lados tenham essas medidas?
8. Considerando a figura a seguir, determine a soma dos ângulos $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$, $\widehat{D}$, $\widehat{E}$ e $\widehat{F}$.



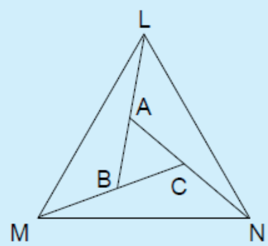
9. Na figura, tem-se $AB = AC$ e $AD = DB = BC$. Calcule $\hat{A}$.



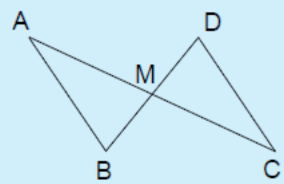
10. Na figura a seguir, $AB = AC$ e $B\hat{A}D \equiv C\hat{A}D$. Demonstre que $BD = DC$.



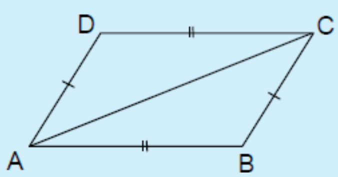
11. Na figura, ABC é equilátero e $AL = BM = CN$. Prove que LMN é também equilátero.



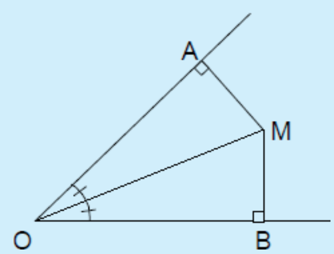
12. Na figura, $AM = MC$ e $\hat{A} \equiv \hat{C}$. Prove que $AB = CD$.



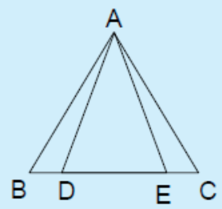
13. Na figura, $DC = AB$ e $AD = BC$. Prove que $C\hat{A}B \equiv A\hat{C}D$ e $D\hat{A}C \equiv A\hat{C}B$.



14. Na figura, $\overrightarrow{OM}$ é bissetriz de $A\hat{O}B$ e os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são retos. Mostre que $MA = MB$.

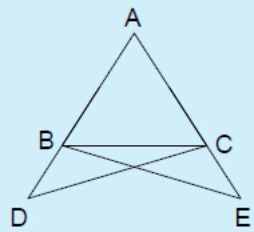


15. Na figura, $AB = AC$ e $BD = EC$. Demonstre que $AD = AE$.

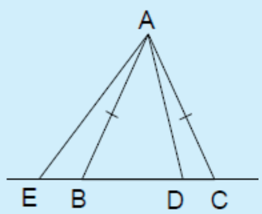


16. Num triângulo ABC, tem-se $AB = AC$. Seja $\overrightarrow{AM}$ a bissetriz de $\hat{A}$. Mostre que $MB = MC$.

17. Na figura, $AB = AC$ e $BC = EC$. Mostre que $CD = BE$.



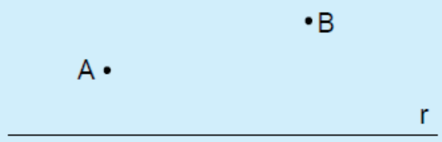
18. Sendo ABC isósceles com $AB = AC$, demonstre que $AD < AB < AE$.



19. Sejam ABC um triângulo e A', B' e C', pontos, respectivamente, entre B e C; A e C; e A e B. Demonstre que o perímetro de $A'B'C'$ é menor do que o de ABC.

20. Sejam ABC um triângulo, $2p$ seu perímetro e X um ponto no interior de ABC. Demonstre que $p<d(X,A)+d(X,B)+d(X,C)<2p$.

21. Sejam A e B dois pontos distintos pertencentes a um mesmo semiplano aberto determinado por uma reta r, como mostra a figura. Determine $P \in r$ tal que $d(A,P) + d(P,B)$ seja a menor possível.



Unidade 3

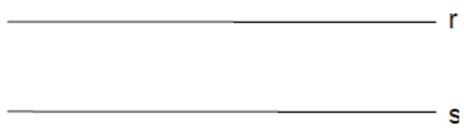
Perpendicularismo e Paralelismo

Objetivos:

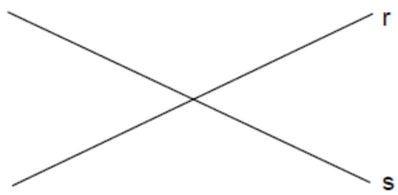
- Reconhecer retas paralelas e retas concorrentes.
- Compreender o significado de reta transversal a duas retas.
- Reconhecer ângulos correspondentes e ângulos alternos internos.
- Saber aplicar os teoremas envolvendo ângulos correspondentes e ângulos alternos internos.

Considere duas retas *r* e *s* no plano. Vamos analisar as possibilidades da interseção dessas duas retas.

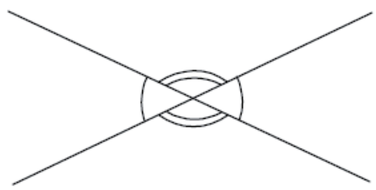
Se elas não se interceptam, dizemos que elas são *paralelas* (e distintas).



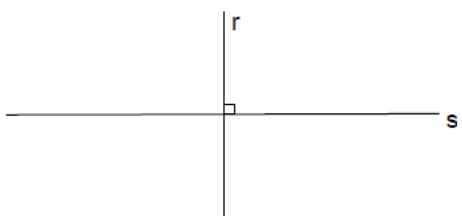
Outra possibilidade é a interseção delas se constituir em apenas um ponto. Neste caso, dizemos que r e s são *concorrentes*.



Observe que retas concorrentes determinam dois pares de ângulos opostos pelo vértice, sendo que dois ângulos não opostos pelo vértice são suplementares.



Definimos o *ângulo entre duas retas* concorrentes *r* e *s* como sendo o menor ângulo que elas formam e diremos que elas são *perpendiculares* se este ângulo é reto.



E se a interseção de *r* e *s* contiver mais de um ponto, o que podemos afirmar?

Bem, admitindo que por dois pontos distintos só passa uma única linha reta, concluímos que, neste caso, elas são coincidentes.

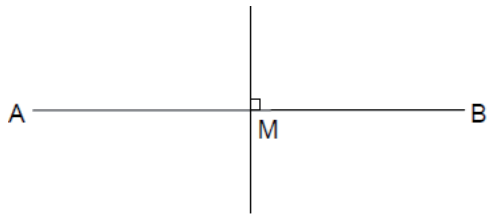
Em resumo: dadas duas retas distintas *r* e *s* no plano, então elas são paralelas ou são concorrentes.

ANOTE

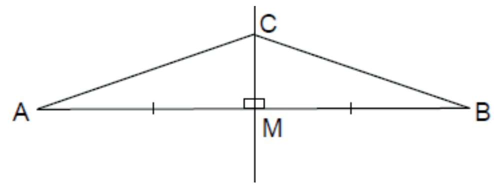
Note que duas retas são perpendiculares, então elas determinam quatro ângulos retos

3.1. Mediatriz de um segmento

Definição 13: *Chama-se mediatriz de um segmento de reta* $\overline{AB}$ *a reta perpendicular a* $\overleftrightarrow{AB}$ *que passa no ponto médio de* $\overline{AB}$.



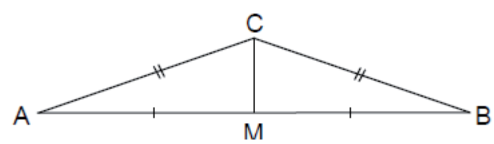
Sabemos que o ponto médio de um segmento é equidistante dos extremos desse segmento. Vamos tomar um ponto C sobre a mediatriz de $\overline{AB}$, diferente do ponto médio M de $\overline{AB}$.



Pelo caso L. A. L de congruência de triângulos podemos concluir que $CMA \equiv CMB$ e daí vem que $CA = CB$, ou seja, C é equidistante de A e B.

Por conseguinte, qualquer ponto que pertence à mediatriz de $\overline{AB}$ é equidistante de A e B.

Vejamos. Seja $C \neq M$ um ponto equidistante de A e B.

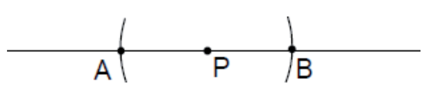


Então, pelo caso L.L.L. de congruência de triângulos, concluímos que $CMA \equiv CMB$. Em particular, os ângulos $C\widehat{M}A$ e $C\widehat{M}B$ são congruentes. Como são suplementares, então são retos, donde, $\overleftrightarrow{CM}$ é perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$. Portanto, $\overleftrightarrow{CM}$ é a mediatriz de $\overline{AB}$.

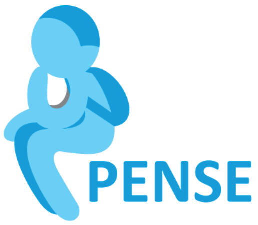
Vamos agora aprender a fazer algumas construções geométricas simples envolvendo perpendicularismo e paralelismo de retas, utilizando régua e compasso.

Comecemos pela construção da reta perpendicular a uma reta r dada, passando por um ponto $P \in r$.

Faça uma abertura qualquer no compasso e com a ponta de ferro no ponto P marque dois pontos A e B como mostra a figura a seguir.

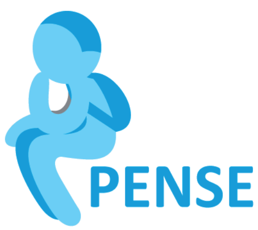


Em seguida, com a abertura do compasso maior do que a distância de A até P e com o centro do compasso em A, trace uma pequena curva e depois, com o centro do compasso em B, faça o mesmo de tal maneira que estas curvas se interceptam num ponto C, como mostra a figura seguinte:

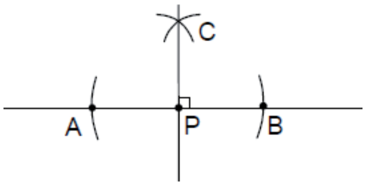


E será que todo ponto eqüidistante de A e B pertence à medianiz de $\overline{AB}$?

De tudo isso podemos conclur que a mediatriz de $\overline{AB}$ é o conjunto (lugar geométrico) dos pontos do plano que são eqüidistantes de A e B.



Por que $\overleftrightarrow{CP}$ é perpendicular a r?

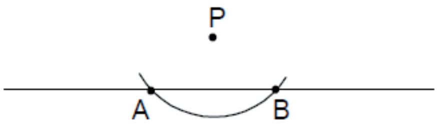


A reta que passa por C e P é perpendicular a r.

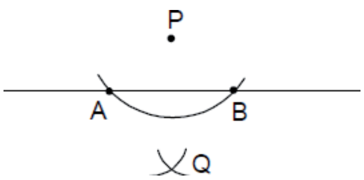
Vejamos. Na construção, temos que P é ponto médio de $\overline{AB}$ e C é equidistante de A e B. Logo, os pontos C e P pertencem à mediatriz de $\overline{AB}$, donde, $\overleftrightarrow{CP}$ é perpendicular à reta r.

Passemos agora à construção da reta perpendicular a uma reta r dada, passando por um ponto $P \notin r$.

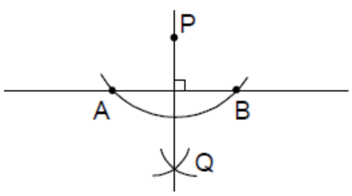
Marque um ponto A qualquer sobre r. Em seguida, com a ponta de ferro do compasso em P e a ponta de lápis em A trace uma curva. Esta curva toca r também num ponto B como mostra a figura a seguir.



Agora, com a abetura do compasso maior do que a metade da distância de A até B e com a ponta de ferro em A, trace uma pequena curva e depois, com o centro do compasso em B, faça o mesmo de tal sorte que essas curvas se interceptem num ponto Q como mostra a figura seguinte:

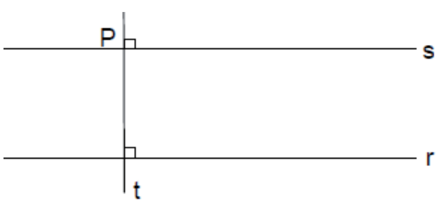


A reta que passa por P e Q é perpendicular a r.

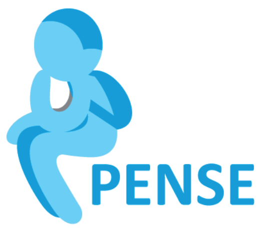


Vamos agora proceder a construção de uma reta paralela a uma reta dada, passando por um ponto $P \notin r$.

Pelo ponto P, trace a reta perpendicular à reta r. Vamos chamar de t esta perpendicular.

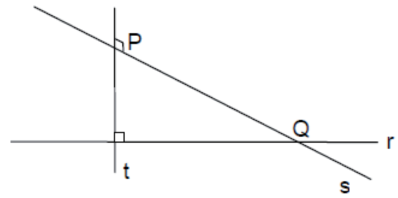


Em seguida, pelo ponto P, trace a perpendicular à reta t. Chamemos de s esta perpendicular. Então, s é paralela a r.



A título de exercício, justifique por que a reta $\overleftrightarrow{PQ}$ é perpendicular a r.

Vejamos. Se não fosse, s interceptaria r num ponto Q, formando assim um triângulo com um ângulo externo de igual medida a de um ângulo interno não adjacente.



PENSE

Quantas paralelas a r passando por P podemos traçar?

Sabemos que isto não pode ocorrer já que todo ângulo externo de um triângulo é maior do que qualquer ângulo interno a ele não adjacente. Por conseguinte, para evitar este absurdo, s não pode interceptar r. Logo, de fato, s é paralela a r.

É razoável admitirmos que só podemos traçar uma, não é mesmo?

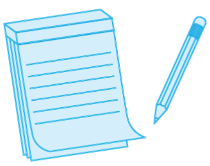
Uma propriedade como esta, que admitimos sem uma demonstração, recebe a denominação de *princípio* ou *axioma* ou ainda *postulado*.

Euclides de Alexandria viveu antes de Cristo e publicou o texto mais influente de todos os tempos: Os Elementos (330 a.C.). Depois da Bíblia, é o livro com mais edições publicadas (provavelmente mais de mil). Os Elementos de Euclides estão divididos em treze livros, dos quais somente os seis primeiros tratam sobre geometria plana elementar. Euclides organizou esse assunto em 5 postulados, 5 noções comuns e mais de 150 teoremas. As noções comuns são também princípios. A diferença destas para os postulados reside no fato de que as noções comuns são mais evidentes. Um tratamento axiomático moderno não faz esta distinção.

Nossa abordagem não é formal como a de Euclides. Por exemplo, não chegamos a enunciar formalmente o seguinte axioma:

Por dois pontos distintos passa uma única linha reta.

Nós o citamos no início da Unidade 1 de maneira totalmente intuitiva.

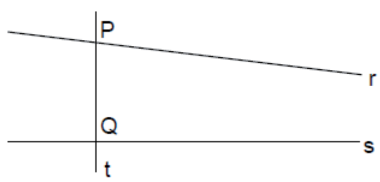


ANOTE

Observe que os pares de retas t e r, e, t e s determinam oito ângulos não rasos: quatro de vértice P e quatro de vértice Q.

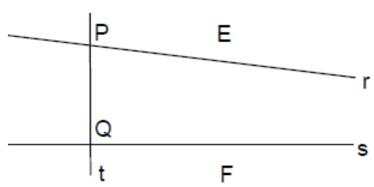
3.2. Paralelismo

Uma reta t chama-se *transversal* a duas retas r e s (paralelas ou não) se t é concorrente a r e s em pontos distintos.



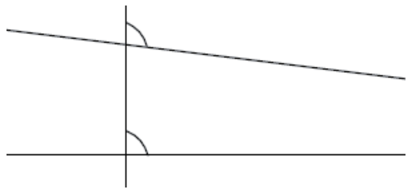
Seja P o ponto de interseção de t com r e seja Q o ponto de interseção de t com s.

Sejam E o semi-plano determinado por r não contendo Q e F o semi-plano determinado por s não contendo P.

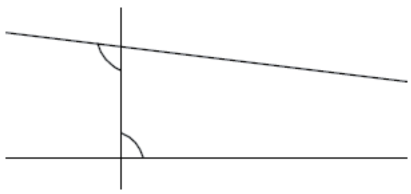


Desses oito ângulos, quatro estão contidos em E $\cup$ F. Esses são chamados de *ângulos externos* e os demais de *internos*. Dois desses oito ângulos são ditos *colaterais* se estão contidos em um mesmo semi-plano determinado por *t*, caso contrário são ditos *alternados*.

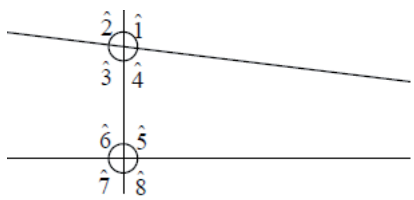
Dois ângulos colaterais e não adjacentes são ditos *correspondentes* se um é interno e o outro é externo. Veja a seguir.



E dois são chamados de *ângulos alternos internos* se são alternados, internos e não adjacentes. Veja a seguir.



Note que se dois ângulos correspondentes são congruentes, estão dois ângulos alternos internos quaisquer também são congruentes.

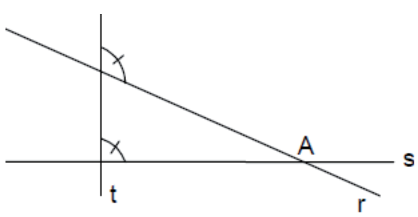


Por exemplo, suponha que $\hat{1} \equiv \hat{5}$. Como $\hat{1}$ e $\hat{3}$ são o.p.v., então são congruentes, logo, os ângulos alternos internos $\hat{3}$ e $\hat{5}$ são também congruentes. Como $\hat{4}$ e $\hat{6}$ são suplementos, respectivamente, de $\hat{3}$ e $\hat{5}$, segue-se que também são congruentes.

Suponha, por exemplo, que $\hat{3}$ e $\hat{5}$ são congruentes. Como $\hat{1}$ e $\hat{3}$ são o. p. v., então são congruentes, logo, os ângulos correspondentes $\hat{1}$ e $\hat{5}$ são também congruentes. Conclua que $\hat{2} \equiv \hat{6}$, $\hat{3} \equiv \hat{7}$ e $\hat{4} \equiv \hat{8}$

Teorema 14: Seja t uma transversal a duas retas r e s. Se dois ângulos correspondentes são congruentes, então r é paralela a s.

Prova: Se *r* não fosse paralela a *s*, então *r* interceptaria *s* num ponto *A*, formando assim um triângulo com um ângulo externo de igual medida a de um ângulo interno não adjacente.



Sabemos que isto não pode ocorrer. Logo, para evitar este absurdo, *r* não pode interceptar *s*. Portanto, são paralelas.

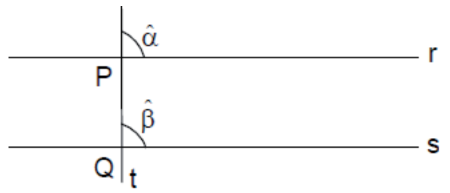
ANOTE

Note também que se dois ângulos alternos internos são congruentes, então dois ângulos correspondes quaisquer são também congruentes.

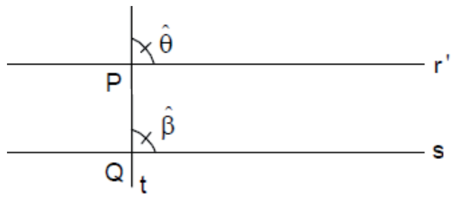
Vale salientar que se uma transversal a duas retas *r* e *s* determina ângulos alternos internos correspondentes, então *r* e *s* são paralelas, uma vez que se dois ângulos alternos internos são congruentes, então dois ângulos correspondentes quaisquer são congruentes.

Teorema 15: Seja *t* uma transversal a duas retas *r* e *s*. Se *r* e *s* são paralelas, então dois ângulos correspondentes quaisquer são congruentes. Conseqüentemente, dois ângulos alternos internos quaisquer são também congruentes.

Prova: De acordo com a figura a seguir, devemos mostrar que $\widehat{\alpha} \equiv \widehat{\beta}$ supondo que *r* é paralela a *s*.



Seja r' uma reta passando por *P* de tal sorte que forme um ângulo $\widehat{\theta}$ com *t* congruente a $\widehat{\beta}$, conforme mostra a figura seguinte:



ATENÇÃO

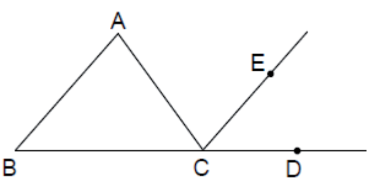
Uma demonstração matemática se faz através de um raciocínio lógico-dedutivo.

Como $\widehat{\theta}$ e $\widehat{\beta}$ são correspondentes e congruentes, segue-se pelo teorema anterior, que *r'* é paralela a *s*. Desse modo, temos duas retas *r* e *r'* paralelas a *s*, passando por *P*. Pelo quinto postulado de Euclides, decorre que *r* = *r'* , logo, $\widehat{\theta} \equiv \widehat{\alpha}$ e, portanto, $\widehat{\alpha} \equiv \widehat{\beta}$.

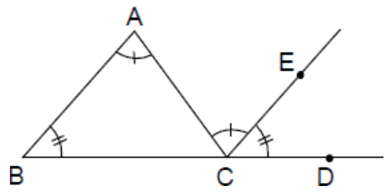
Através de uma experiência, havíamos verificado que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180º. Contudo, isto não se constitui em uma prova matemática. Primeiro, devido à particularização do triângulo utilizado na experiência e, segundo, pelas possíveis imperfeições milimétricas de um desenho.

Vamos apresentar agora uma demonstração de que a soma dos ângulos internos de um triângulo vale a medida de um raso.

No triângulo a seguir, por *C* considere a paralela $\overleftrightarrow{CE}$ ao lado $\overline{AB}$.



Dado que Â e $A\widehat{C}E$ são alternos internos em relação à transversal $\overleftrightarrow{CA}$, então, de acordo com o teorema anterior, são congruentes. Considerando agora que $\widehat{B}$ e $E\widehat{C}D$ são correspondentes em relação à transversal $\overleftrightarrow{BC}$, segue-se que são congruentes.



Como $|\widehat{C}| + |A\widehat{C}E| + |E\widehat{C}D| = 180°$, decorre que $|\widehat{C}| + |\widehat{A}| + |\widehat{B}| = 180°$, como queríamos demonstrar.

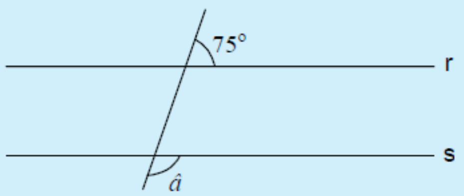
SÍNTESE DA UNIDADE

Definimos retas paralelas, retas concorrentes e transversal a duas retas. Estabelecemos condição necessária e suficiente para que duas retas sejam paralelas, via transversal.

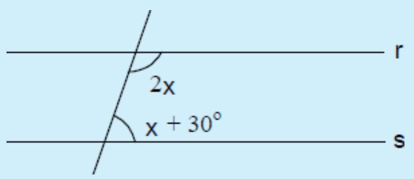
ATIVIDADES DE AVALIAÇÃO

1. Construa um triângulo retângulo de catetos medindo 6cm e 8cm.

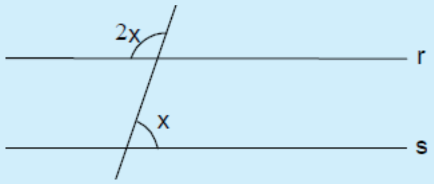
2. Sendo $r\,//\,s$ (o símbolo $//$ é lido assim: ``paralela a''), determine a medida de $\hat{a}$.



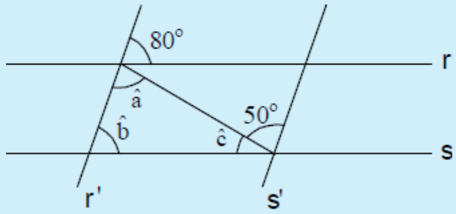
3. Determine x, sendo $r\,//\,s$.



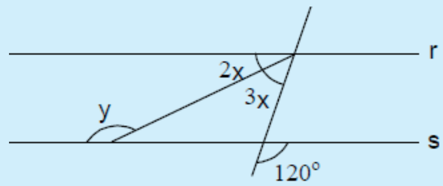
4. Determine x, sendo $r\,//\,s$.



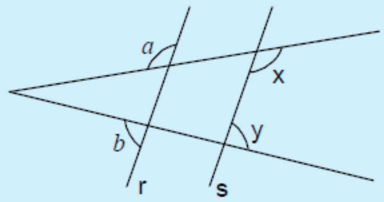
5. Sendo $r // s$ e $r' // s'$, determine as medidas de $\hat{a}$, $\hat{b}$ e $\hat{c}$.



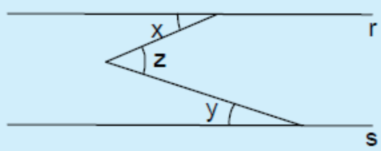
6. Determine x e y, sendo $r // s$.



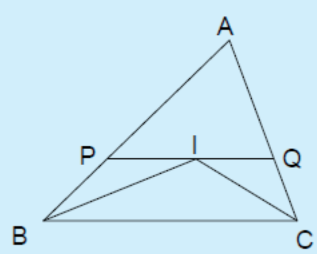
7. Sendo $r // s$, demonstre que $a + b = x + y$.



8. Considerando a figura, demonstre que z = x + y, sendo $r // s$.



9. Sendo $\overleftrightarrow{PQ} // \overleftrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{BI}$ e $\overrightarrow{CI}$ respectivamente, bissetrizes de $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$, demonstre que os triângulos PBI e QCI são isósceles e que $PQ = PB + QC$.



Unidade 4

Quadriláteros

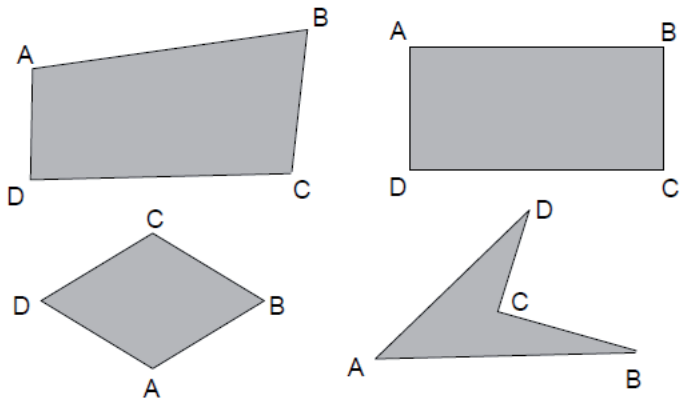
Objetivos:

- Saber definir quadrilátero.
- Saber distinguir um quadrilátero convexo de um côncavo.
- Conhecer a classificação dos chamados quadriláteros notáveis.
- Conhecer as propriedades dos quadriláteros notáveis e saber aplicá-las na resolução de problemas.
- Saber o que é o baricentro de um triângulo e conhecer suas propriedades.

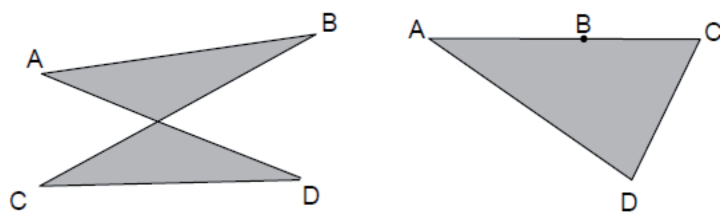
Introdução

Definição 16: *Chamamos de quadrilátero a região do plano limitada por 4 segmentos de reta* $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ *e* $\overline{DA}$, *em que dois segmentos consecutivos nunca são colineares e dois segmentos não consecutivos jamais se interceptam.*

São quadriláteros:

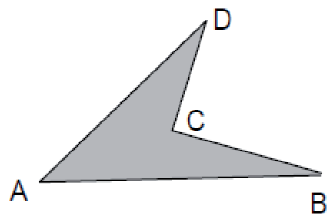


Não são quadriláteros:



Um quadrilátero pode ser convexo ou côncavo. Ele é chamado de *convexo* se satisfaz à seguinte propriedade: o segmento de reta que une dois pontos distintos quaisquer pertencentes ao quadrilátero está contido totalmente nele. Caso contrário, ou seja, se existem dois pontos distintos do quadrilátero tais que o segmento de reta que liga esses dois pontos não está totalmente contido nele, nós o chamaremos de *côncavo*.

Todos os quadriláteros que apresentamos há pouco são convexos, exceto o seguinte:



Adotaremos a notação $ABCD$ para representar o quadrilátero determinado pelos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$.

Chama-se *lado* de um quadrilátero $ABCD$ qualquer um dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ ou $\overline{DA}$; chamamos de *vértice* qualquer um dos pontos A, B, C ou D e diagonal qualquer um dos segmentos $\overline{AC}$ ou $\overline{BD}$.

Estudaremos somente os quadriláteros convexos. Por isso, daqui por diante, iremos também chamá-los simplesmente de quadriláteros.

Chama-se *ângulo interno* ou simplesmente *ângulo* de um quadrilátero convexo $ABCD$ qualquer um dos ângulos $\hat{A}$. $\hat{B}$. $\hat{C}$ ou $\hat{D}$.

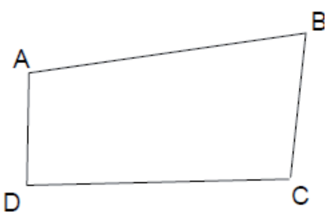
Chamaremos de *perímetro* de um quadrilátero a soma das medidas de seus lados.

Dois lados de um quadrilátero convexo são ditos *opostos* se não são adjacentes e dois ângulos são chamados *opostos* se seus vértices não são consecutivos.

No quadrilátero a seguir, os seguintes pares de lados são opostos: $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, e, $\overline{BC}$ e $\overline{DA}$. . Os seguintes pares de ângulos são opostos: $\hat{A}$ e $\hat{C}$, e, $\hat{B}$ e $\hat{D}$.

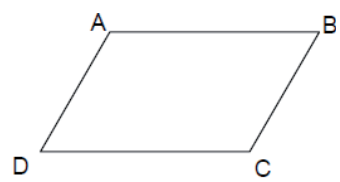
DICA

(A notação // é lida assim: é paralelo a)



4.1. Paralelogramo

Definição 17: *Um quadrilátero convexo chama-se paralelogramo se seus lados opostos são paralelos.*



O quadrilátero $ABCD$ é um paralelogramo se $\overline{AB}//\overline{CD}$ e $\overline{AD}//\overline{BC}$

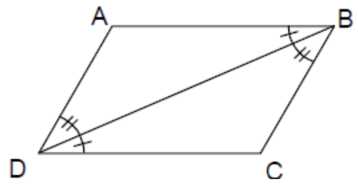
Teorema 18: Em todo paralelogramo, valem as seguintes propriedades:

a) Lados opostos são congruentes.

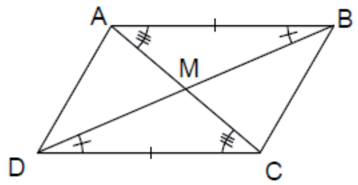
b) Ângulos opostos são congruentes.

c) As diagonais se cruzam ao meio.

Prova: Seja $ABCD$ um paralelogramo. Considere a diagonal $\overline{BD}$. Sendo $\overline{AB}//\overline{CD}$ então os ângulos alternos internos $A\hat{B}D$ e $B\hat{D}C$ são congruentes e sendo $\overline{AD}//\overline{BC}$, segue-se que os ângulos alternos internos $A\hat{D}B$ e $C\hat{B}D$ são também congruentes.



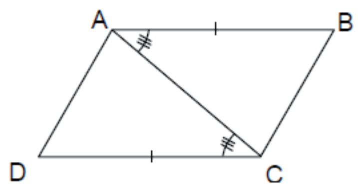
Assim sendo, pelo caso A. L. A. , vem que ABD ≡ CDB. Logo, $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$, $\overline{AD} \equiv \overline{BC}$ e $\hat{A} \equiv \hat{C}$. Daí, decorre o ítem "a". Para provar o ítem "b", basta mostrar que $\hat{B} \equiv \hat{D}$. Desde que $|\hat{B}| = |A\hat{B}D| + |C\hat{B}D|$, $|\hat{D}| = |B\hat{D}C| + |A\hat{D}B|$, $|A\hat{B}D| = |B\hat{D}C|$ e $|C\hat{B}D| = |A\hat{D}B|$,, segue-se que $|\hat{B}| = |\hat{D}|$, ou seja, $\hat{B} \equiv \hat{D}$. Para finalizar, provaremos que as diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ se cruzam ao meio. Seja M o ponto de encontro das diagonais.



Os ângulos $C\hat{A}B$ e $A\hat{C}D$ são alternos internos considerando-se a transversal $\overleftrightarrow{AC}$ às retas paralelas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{DC}$, logo, são congruentes. Posto que $\overline{AB} \equiv \overline{DC}$ e $A\hat{B}D \equiv B\hat{D}C$, segue-se, pelo caso A. L. A., que *ABM* ≡ *CDM*, donde, *MA* = *MC* e *MB* = *MD*. Portanto, as diagonais se cruzam ao meio.

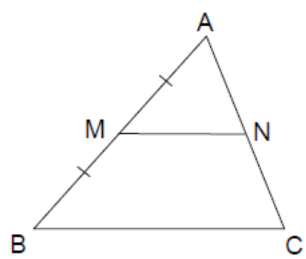
Teorema 19: Se um quadrilátero possui dois lados opostos paralelos e congruentes, então ele é um paralelogramo.

Prova: Seja *ABCD* um quadrilátero tal que $\overline{AB}//\overline{CD}$ e $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$. Devemos provar que $\overline{AD}//\overline{BC}$. Considerando $\overleftrightarrow{AC}$ como transversal às retas paralelas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$, vem que os ângulos alternos internos $B\hat{A}C$ e $D\hat{C}A$ são congruentes.

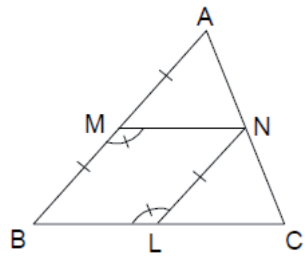


Desse modo, pelo caso L. A. L., segue-se que ABC ≡ CDA, donde, $C\hat{A}D \equiv A\hat{C}B$. Considerando agora $\overleftrightarrow{AC}$ como transversal às retas $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{BC}$, decorre que elas são paralelas, uma vez que os ângulos alternos internos $C\hat{A}D$ e $A\hat{C}B$ são congruentes.

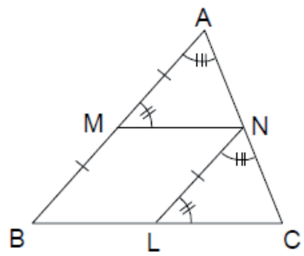
Teorema 20: *Sejam ABC um triângulo, M o ponto médio de* $\overline{AB}$ *e N um ponto entre A e C. Se* $\overline{MN}//\overline{BC}$, *então N é o ponto médio de* $\overline{AC}$ *e* $MN = \frac{1}{2}(BC)$.



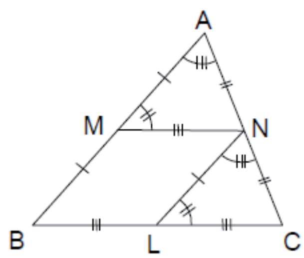
Prova: Seja L entre B e C tal que $\overline{NL}//\overline{AB}$. Assim sendo, $MNLB$ é um paralelogramo.



Por conseguinte, MB = NL e $B\widehat{M}N \equiv N\widehat{L}B$, de acordo com o teorema antes do anterior. Conseqüentemente, os ângulos $A\widehat{M}N$ e $N\widehat{L}C$ são congruentes por serem suplementares de ângulos congruentes.

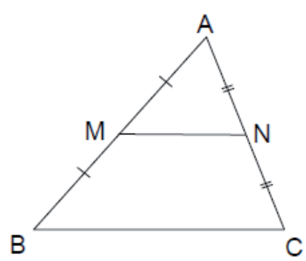


Considerando $\overleftrightarrow{AC}$ como transversal às retas paralelas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{NL}$, os ângulos $\widehat{A}$ e $L\widehat{N}C$ são correspondentes, logo, são congruentes. Assim sendo, pelo caso A. L. A., decorre que $AMN \equiv NLC$. Daí, vem que $AN = NC$ e $MN = LC$.

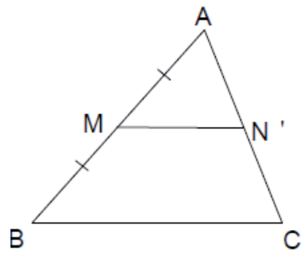


Em particular, N é o ponto médio de $\overline{AC}$. Posto que $\overline{MN}$ e $\overline{BL}$ são lados opostos de um paralelogramo, segue-se que MN = BL. Desde que MN = LC, decorre que $MN = \frac{1}{2}(BC)$.

Teorema 21: Sejam ABC um triângulo, e, M e N, respectivamente, pontos médios de $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$. Então, $\overline{MN}//\overline{BC}$ e $MN = \frac{1}{2}(BC)$.



Prova: Seja N' entre A e C tal que $\overline{MN'}//\overline{BC}$.

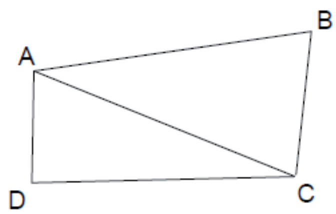


Pelo teorema anterior, decorre que N' é ponto médio de $\overline{AC}$ e $MN' = \frac{1}{2}(BC)$. Como todo segmento de reta só admite um único ponto médio, segue-se que $N = N'$. Portanto, $\overline{MN}//\overline{BC}$ e $MN = \frac{1}{2}(BC)$.

Se um quadrilátero é equiângulo, quanto vale cada ângulo interno?

4.2. Retângulo, losango e quadrado

Seja $ABCD$ um quadrilátero qualquer. Vamos calcular a soma dos ângulos internos de $ABCD$. Considere a diagonal $\overline{AC}$.



Observe que a soma dos ângulos internos de $ABCD$ é exatamente a soma dos ângulos internos do triângulo ABC mais a soma dos ângulos internos de ACD.

Posto que a soma dos ângulos internos de todo triângulo é 180°, segue-se que a soma dos ângulos internos de $ABCD$ é igual a 2 X 180°, isto é, 360°. De acordo?

É óbvio que vale $\frac{360°}{4}$, ou seja, 90°.

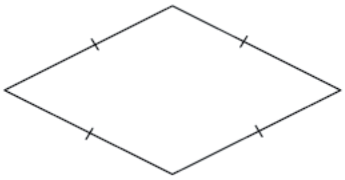
Conclusão: todos os ângulos de um quadrilátero equiângulo são retos.

A título de exercício, demonstre que todo retângulo é um paralelogramo.

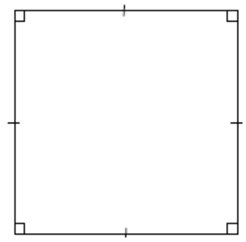
Definição 22: Chama-se retângulo o quadrilátero que tem todos os seus ângulos congruentes.

Definição 23: Chama-se losango o quadrilátero equilátero, ou seja, o quadrilátero que tem todos os seus lados congruentes.

Demonstre também, a título de exercício, que todo losango é um paralelogramo.



Definição 24: Chama-se quadrado o quadrilátero que é, ao mesmo tempo, eqüiângulo e equilátero, isto é, o quadrilátero que é retângulo e losango.



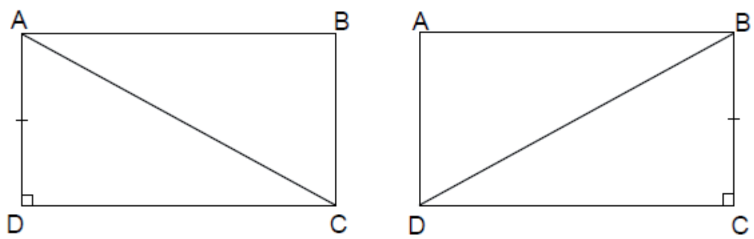
Vale salientarmos que toda propriedade que vale para paralelogramos vale para retângulos e losangos, já que são paralelogramos. Assim como toda propriedade que valer para retângulos ou losangos valerá para quadrados.

ATENÇÃO

Por exemplo: lados opostos de um retângulo são congruentes; as diagonais de um losango se cruzam ao meio; etc.

Teorema 25: As diagonais de um retângulo são congruentes.

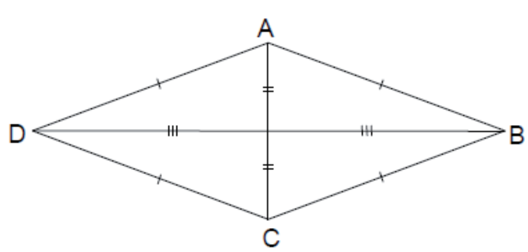
Prova: Seja *ABCD* um retângulo. Lados opostos de um retângulo são congruentes.



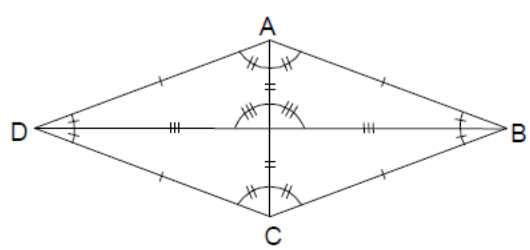
Logo, $AD = BC$ e como $\hat{D}$ e $\hat{C}$ são retos, segue-se pelo caso L. L. L., que $ADC = BCD$. Por conseguinte, $AC = BD$.

Teorema 26: Em todo losango, as diagonais são perpendiculares e são bissetrizes dos ângulos internos.

Prova: Seja *ABCD* um losango. Seja *M* o ponto de encontro das diagonais.



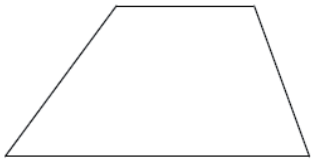
Estas se cruzam ao meio. Logo, pelo caso L. L. L. , são congruentes entre si os triângulos *AMD*, *AMB*, *CMB* e *CMD*. Conseqüentemente, são congruentes entre si os ângulos $M\hat{D}A$, $M\hat{B}A$, $M\hat{B}C$ e $M\hat{D}C$, assim como também $M\hat{A}D$, $M\hat{A}B$, $M\hat{C}B$ e $M\hat{C}D$.



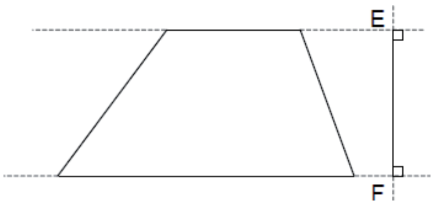
Daí, concluímos que as diagonais são bissetrizes dos ângulos internos do losango. E da congruência dos triângulos *AMD* e *AMB*, segue-se que $D\widehat{M}A \equiv B\widehat{M}A$. Como são suplementares, decorre que são retos. Portanto, as diagonais são perpendiculares.

4.3. Trapézio

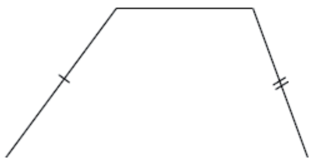
Definição 27: *Um quadrilátero convexo chama-se trapézio se possui pelo menos dois lados paralelos. Chamaremos esses lados de bases do trapézio. Aquela cuja medida for menor do que ou igual à medida da outra será chamada de base menor e a outra de base maior.*



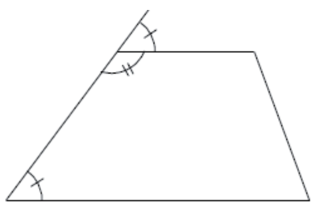
Definimos a *altura* de um trapézio como sendo a distância de dois pontos quaisquer E e F pertencentes, respectivamente, às retas que contêm as bases, em que $\overleftrightarrow{EF}$ é perpendicular às mesmas.



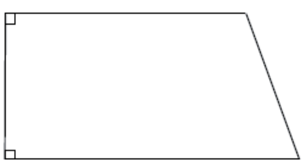
Num trapézio, há dois lados que podem ou não ser paralelos. Eles serão chamados de *lados transversos*.

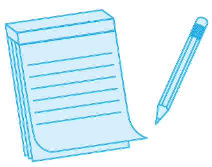


Uma propriedade: ângulos internos adjacentes a um mesmo lado transverso são suplementares, pois o ângulo externo adjacente a um é congruente ao outro, já que são ângulos correspondentes.



Um trapézio é dito *trapézio retângulo* se possui um ângulo reto. Neste caso, o outro ângulo adjacente ao lado transverso deste ângulo reto é também reto e assim todo trapézio retângulo tem no mínimo dois ângulos retos.

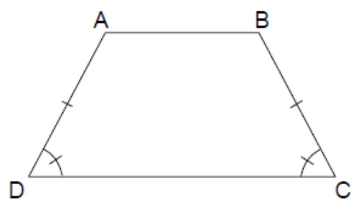




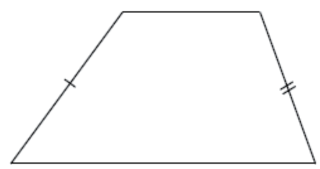
Note que todo paralelogramo é um trapézio e, portanto, toda propriedade válida para trapézios é válida para paralelogramos.

Um trapézio é dito *trapézio isósceles* se os lados transversos são congruentes e não paralelos.

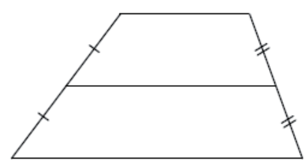
Em todo trapézio isósceles, os ângulos internos adjacentes a qualquer base são congruentes.

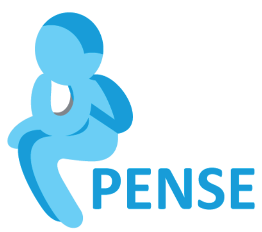


Um trapézio chama-se *trapézio escaleno* se seus lados transversos não são congruentes.



Chama-se *base média* de um trapézio o segmento que une os pontos médios dos lados transversos.

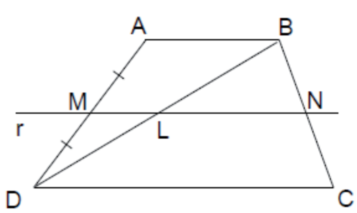




Você seria capaz de demonstrar esse fato? Tente. Uma ajuda: por B, trace a paralela a $\overline{AD}$

Teorema 28: *Em todo trapézio, a base média é paralela às bases e mede a semi-soma destas.*

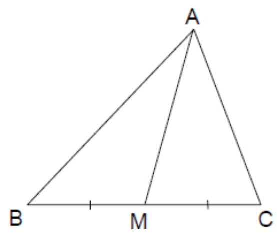
Prova: Seja $ABCD$ um trapézio, em que $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são as bases. Seja M o ponto médio de $\overline{AD}$. Considere a diagonal $\overline{BD}$ e a reta r paralela às bases passando por M.



Considerando o triângulo ABD, segue-se, pelo Teorema 20, que r intercepta $\overline{BD}$ em seu ponto médio, digamos, L. Além disso, $ML = \frac{1}{2}(AB)$.. Considerando agora o triângulo BCD e usando novamente o Teorema 20, vem que r intercepta $\overline{BC}$ em seu ponto médio. Se N é esse ponto médio, temos: $LN = \frac{1}{2}(CD)$. Desse modo, $MN = ML + LN = \frac{1}{2}(AB) + \frac{1}{2}(CD) = \frac{1}{2}(AB + CD)$, como queríamos demonstrar.

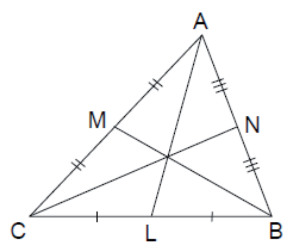
4.4. Baricentro

Definição 29. Chama-se mediana de um triângulo, relativa a um lado, o segmento de reta cujas extremidades são o vértice oposto ao lado e seu ponto médio.

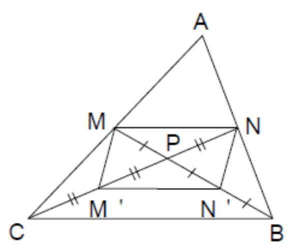


Como todo triângulo tem três lados, então qualquer triângulo possui três medianas. Um resultado interessante sobre as medianas de um triângulo encontra-se no próximo teorema.

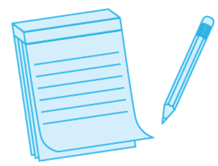
Teorema 30: As medianas de um triângulo interceptam-se num mesmo ponto chamado de baricentro do triângulo. Além disso, a distância do baricentro a cada vértice é duas vezes sua distância ao ponto médio do lado oposto.



Prova. Sejam *ABC* um triângulo e *L*, *M* e *N*, respectivamente, os pontos médios dos lados $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ e $\overline{AB}$. Tomemos duas medianas. Digamos, $\overline{BM}$ e $\overline{CN}$.

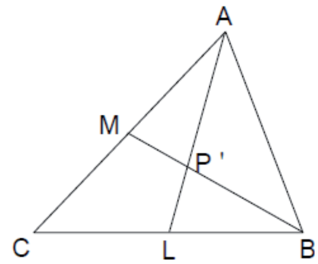


Seja *P* o ponto de interseção destas medianas. Inicialmente, mostraremos que *PC* = *2(PN)* e *PB* = *2(PM)*. Com efeito, pelo Teorema 21, decorre $\overline{MN}$ que é paralelo a $\overline{BC}$ e$MN = \frac{1}{2}(BC)$.. Sejam *M'* e *N'* os pontos médios de $\overline{CP}$ e $\overline{PB}$ respectivamente. Considerando o triângulo *PBC* e usando novamente o Teorema 21, podemos concluir que $\overline{M'N'}$ é paralelo a $\overline{M'N'}$ e $M'N' = \frac{1}{2}(BC)$. Desse modo, segue-se que $\overline{MN}$ é paralelo a $\overline{M'N'}$ e $\overline{M'N'}$ e $\overline{MN} \equiv \overline{M'N'}$. Pelo Teorema 19, decorre que *MNN'M'* é um paralelogramo e como em todo paralelogramo as diagonais se cruzam ao meio, vem que *M'P* = *PN* e *N'P* = *PM*. Logo, *PC* = *2(PN)* e *PB* = *2(PM)*. Agora, seja *P'* o ponto de encontro das medianas $\overline{AL}$ e $\overline{BM}$.



ANOTE

Na figura, $\overline{AM}$ é a mediana do triângulo *ABC* relativa ao lado $\overline{BC}$



Pelo que foi provado, temos que $P'B = 2(P'M)$ e $P'A = 2(P'L)$. Para encerrar a demonstração, basta mostrarmos que $P' = P$. De acordo? Desde que $PB = 2(PM)$ e $P'B = 2(P'M)$, segue-se que $BM = 3(PM)$ e $BM = 3(P'M)$, donde, $PM = P'M$. Posto que $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MP'}$ e $MP = MP'$, decorre que $P' = P$.

SÍNTESE DA UNIDADE

Definimos quadrilátero. Definimos trapézio e paralelogramo e estabelecemos suas propriedades gerais através de teoremas. Enunciamos e demonstramos as propriedades do retângulo, losango e quadrado. Demonstramos o teorema segundo o qual as medianas de um triângulo interceptam-se num mesmo ponto chamado de baricentro.

ATIVIDADES DE AVALIAÇÃO

1. Construa um quadrilátero equiângulo que não seja equilátero.

2. Construa um quadrilátero equilátero que não seja equiângulo.

3. Construa um quadrado.

4. Construa um paralelogramo.

5. Determine os lados de um paralelogramo sabendo que seu perímetro é 48 e que a soma dos lados maiores representa 5/3 da soma dos lados menores.

6. Determine os ângulos de um paralelogramo sabendo que a soma de dois ângulos opostos vale 4/5 da soma dos outros dois ângulos opostos.

7. Determine os ângulos de um losango sabendo que uma diagonal forma com um de seus lados um ângulo que mede a terça parte de um reto.

8. Determine a base média de um trapézio cujas bases medem 6cm e 8cm.

9. Determine as bases de um trapézio sabendo que a base média vale 20cm e a menor vale 2/3 da maior.

10. A base menor de um trapézio isósceles mede 8cm e a maior 24cm. Determine o comprimento dos lados transversos sabendo que o perímetro do trapézio é 40cm.

11. Determine os ângulos de um trapézio isósceles sabendo que um dos ângulos vale 2/7 do ângulo externo a ele adjacente.

12. Determine os ângulos de um trapézio sabendo que a soma de dois ângulos consecutivos vale 120º e a diferença 40º.

13. Determine o perímetro do trapézio $ABCD$ cuja base maior AB = 10 cm, $|\widehat{A}| = |\widehat{B}| = 60^\circ$ e a diagonal $\overline{AC}$ é perpendicular ao lado $\overline{BC}$.

14. Demonstre que se, num quadrilátero convexo, lados opostos são congruentes, então esse quadrilátero é um paralelogramo.

15. Demonstre que se, num quadrilátero convexo, ângulos opostos são congruentes, então esse quadrilátero é um paralelogramo.

16. Demonstre que se, as diagonais de um quadrilátero convexo se cruzam ao meio, então esse quadrilátero é um paralelogramo.

17. Demonstre que os pontos médios dos lados de um quadrilátero são sempre vértices de um paralelogramo.

18. Demonstre que as diagonais de um quadrado são congruentes e perpendiculares.

19. Demonstre que se as diagonais de um quadrilátero convexo se cruzam ao meio e são perpendiculares, então esse quadrilátero é um losango.

20. Demonstre que se as diagonais de um quadrilátero convexo se cruzam ao meio e são congruentes, então esse quadrilátero é um retângulo.

21. Demonstre que se um trapézio retângulo tem um ângulo medindo 30º, então sua altura vale a metade do lado não perpendicular às bases.

22. Demonstre que a distância dos pontos médios das diagonais de um trapézio vale a semi-diferença das bases.

23. Determine a distância dos pontos médios das diagonais de um trapézio cujas bases medem 18cm e 10cm.

24. Sejam ABC um triângulo, em que $AB = AC$, e, L, M e N pontos entre, respectivamente, A e B, B e C, e, A e C. Mostre que se $\overleftrightarrow{LM} // \overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{MN} // \overleftrightarrow{AB}$, então $AB = LM + MN$.

25. Seja m_a a mediana relativa ao lado a de um triângulo. Demonstre que o triângulo só é retângulo no ângulo oposto ao lado a se $m_a = \frac{a}{2}$.

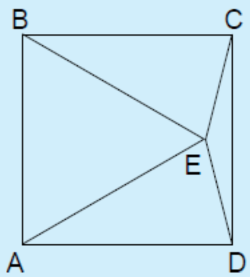
26. Demonstre que a mediana relativa a um lado de um triângulo é menor do que a semi-soma dos outros dois lados e é maior do que a semi-diferença.

27. Mostre que a soma das medianas de um triângulo é menor do que o perímetro e é maior do que o semi-perímetro.

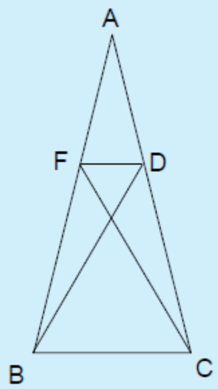
28. Sejam $ABCD$ um paralelogramo e M e N, respectivamente, os pontos médios de $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$. Prove que os segmentos $\overline{DM}$ e $\overline{DN}$ cortam a diagonal $\overline{AC}$, dividindo-a em três partes congruentes.

29. Prove que a soma das medianas de um triângulo é maior do que 3/4 de seu perímetro.

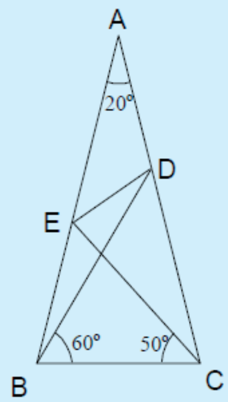
30. Na figura, $ABCD$ é um quadrado . Mostre que o triângulo ABE é equilátero $\Leftrightarrow |E\widehat{C}D| = |E\widehat{D}C| = 15^\circ$.



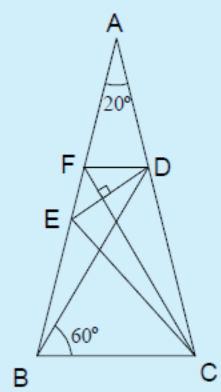
31. 31. Na figura, temos $AB = AC$. Mostre que $\overline{FD} // \overline{BC} \Leftrightarrow F\widehat{C}B \equiv D\widehat{B}C$.



32. 32. Na figura, temos $AB = AC$. Determine $B\widehat{D}E$.



33. 33. Na figura, temos AB = AC, $\overline{FD} // \overline{BC}$ e $\overline{DE} \perp \overline{FC}$. Mostre que $|B\widehat{C}E| = 50^\circ$.



Unidade 5

Polígonos

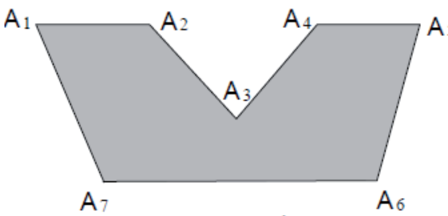
Objetivos:

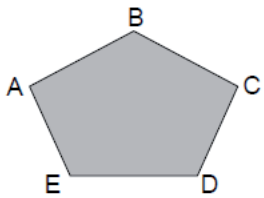
- Saber definir polígono.
- Saber distinguir um polígono convexo de um côncavo.
- Conhecer a denominação dos polígonos quanto ao número de lados.
- Conhecer as propriedades gerais dos polígonos tais como número de diagonais, soma dos ângulos internos, etc e saber aplicá-las na resolução de problemas.
- Reconhecer polígono regular.

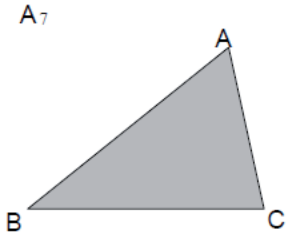
Introdução

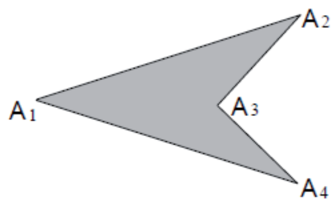
Definição 31: *Chamamos de polígono a região do plano limitada por n segmentos de reta* $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, $\overline{A_3A_4}$, ..., $\overline{A_{n-1}A_n}$ *e* $\overline{A_nA_1}$, *em que dois segmentos consecutivos nunca são colineares e dois segmentos não consecutivos jamais se interceptam.*

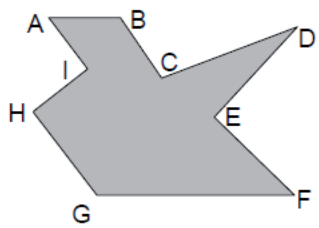
São polígonos:

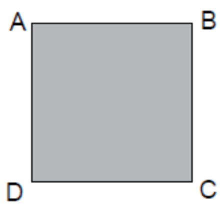




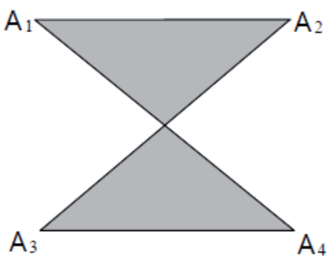


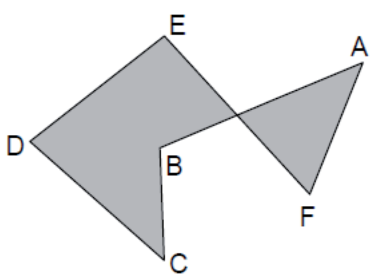






Não são polígonos:





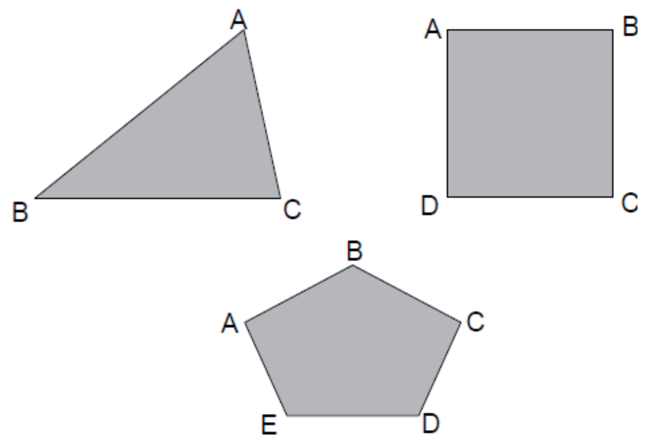
Adotaremos a notação $A_1A_2A_3...A_n$ para representar o polígono determinado pelos segmentos de reta $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, ..., $\overline{A_{n-1}A_n}$ e $\overline{A_nA_1}$.

Chama-se *lado* de um polígono qualquer um dos segmentos que o limita e chama-se *vértice* de um polígono qualquer extremidade de um lado do polígono.

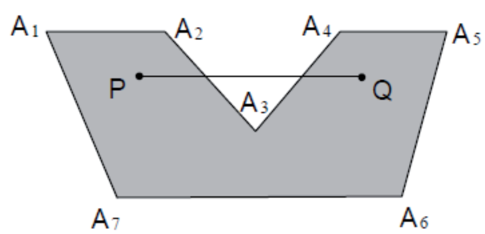
5.1. Polígono convexo e polígono côncavo

Definição 32: *Chama-se polígono convexo todo polígono que tem a seguinte propriedade: o segmento de reta que une dois pontos distintos quaisquer pertencentes ao polígono está contido totalmente nele. Se o polígono não possui esta propriedade é chamado de polígono côncavo.*

São polígonos convexos:



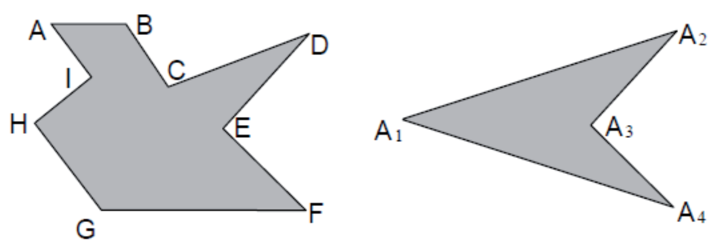
Já o polígono seguinte é côncavo:



ANOTE

Veja que o segmento de reta $\overline{PQ}$ não está totalmente contido no polígono $A_1A_2...A_7$

Os polígonos a seguir são também côncavos.



ANOTE

Note, através dos exemplos acima, que o número de lados e o número de vértices de um polígono são iguais.

Estudaremos somente os polígonos convexos. Por isso, daqui por diante, iremos também chamá-los simplesmente de polígonos.

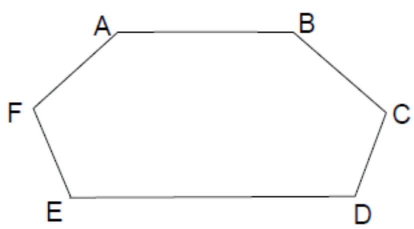
A tabela a seguir fornece denominações especiais de alguns polígonos quanto ao número de lados.

Nº de lados	Denominação
3	Triângulo
4	Quadrilátero
5	Pentágono
6	Hexágono
7	Heptágono
8	Octógono
9	Eneágono
10	Decágono
11	Undecágono
12	Dodecágono
15	Pentadecágono
20	Icoságono

Em geral, um polígono com n lados é chamado de n-látero ou n-ágono.

Chama-se *perímetro* de um polígono a soma das medidas de seus lados.

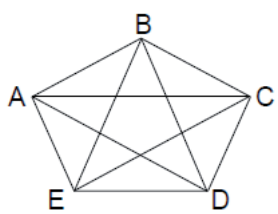
Dois vértices de um polígono são ditos *consecutivos* se são extremidades de um mesmo lado.



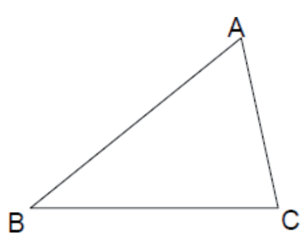
No polígono anterior são vértices consecutivos: A e B, B e C, C e D, D e E, E e F, e, F e A.

Chama-se *diagonal* de um polígono, qualquer segmento que une dois vértices não consecutivos do polígono.

A seguir, as diagonais do pentágono $ABCDE$ são os segmentos $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BD}$, $\overline{BE}$ e $\overline{CE}$.

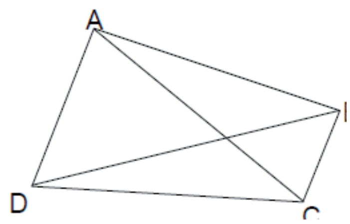


Quantas diagonais possui um triângulo? Como se vê, nenhuma.



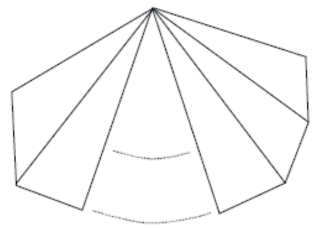
E quantas possui um quadrilátero?

Já, por exemplo, A e C, A e D, B e E, etc. não são consecutivos.



Já vimos que um pentágono possui 5 diagonais. E de um modo geral, quantas diagonais possui um polígono de n lados?

Vejamos. De cada vértice partem $n - 3$ diagonais.



Sendo n o número de vértices, então temos $n(n - 3)$ diagonais partindo dos n vértices. Mas, observe que nesta contagem cada diagonal foi computada duas vezes. Por exemplo, a diagonal $\overline{AC}$ foi contada quando consideramos o vértice A e foi contada de novo quando consideramos o vértice C. Assim sendo, o número total exato de diagonais é igual a $\frac{n(n-3)}{2}$.

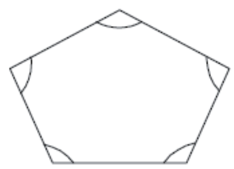
Por conseguinte, o número de diagonais de um n-ágono é igual a

$$\boxed{\frac{n(n-3)}{2}}$$

ANOTE

Note que a cada vértice do polígono corresponde um ângulo interno.

Chama-se *ângulo interno* ou simplesmente *ângulo* de um polígono convexo qualquer ângulo formado por dois lados adjacentes.



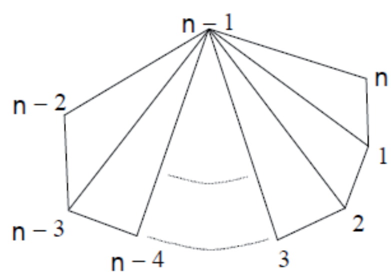
Conseqüentemente, o número de ângulos internos é igual ao número de vértices do polígono.

Já sabemos que a soma dos ângulos internos de um triângulo é constante e igual a 180º e que a soma dos ângulos internos de qualquer quadrilátero vale sempre 360º, já que ele pode ser decomposto como a união de dois triângulos.

Vamos deduzir. Tracemos as $n - 3$ diagonais partindo de um vértice escolhido ao acaso.

PENSE

E de um modo geral, qual é a soma dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados?



Veja que essas diagonais determinam $n-2$ triângulos de maneira que a soma das medidas dos ângulos internos de todos os $n-2$ triângulos é exatamente a soma das medidas dos ângulos internos do polígono. Portanto, esta soma é igual a $(n-2)\cdot 180^\circ$

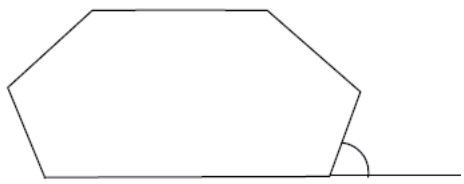
Conclusão: a soma dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados é igual a

$$\boxed{(n-2)\cdot 180^\circ}$$

Conseqüentemente, cada ângulo interno de um polígono equiângulo de n lados, isto é, um polígono cujos ângulos têm mesma medida, vale

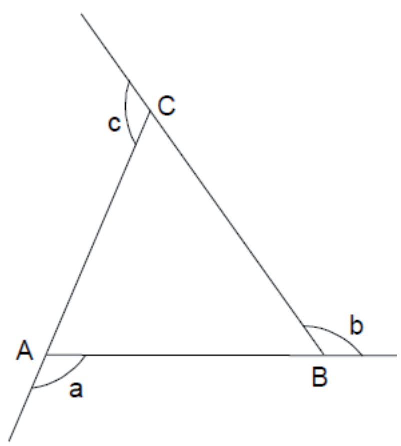
$$\boxed{\frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n}}$$

Chama-se *ângulo externo* de um polígono convexo, qualquer ângulo formado por um lado e o prolongamento de um lado adjacente.



E quanto daria a soma dos ângulos externos de um polígono convexo de n lados?

Vamos começar com um triângulo.



ANOTE

Observe que todo ângulo externo é suplemento do ângulo interno a ele adjacente.

Sejam $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$ os ângulos internos e a, b e c as medidas dos respectivos ângulos externos adjacentes. Então, temos:

$$\begin{cases} a+|\widehat{A}|=180^\circ \\ b+|\widehat{B}|=180^\circ \\ c+|\widehat{C}|=180^\circ \end{cases}$$

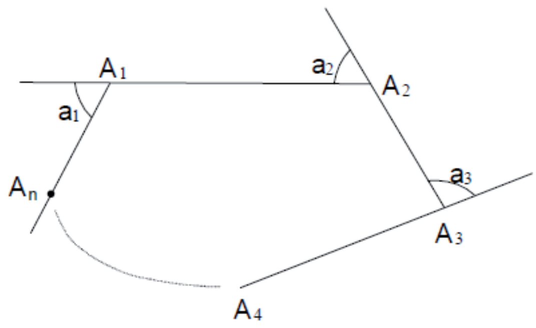
Somando-se essas igualdades membro a membro, obtemos:

$$a+b+c+|\widehat{A}|+|\widehat{B}|+|\widehat{C}|=3\cdot 180^\circ$$

Como $|\widehat{A}| + |\widehat{B}| + |\widehat{C}| = 180°$, vem que $a + b + c + 180° = 3 \cdot 180°$ e daí $a + b + c = 360°$.

Logo, a soma dos ângulos externos de um triângulo é igual a 360º.

Passemos agora a um polígono com n lados.



Sejam $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ as medidas dos ângulos externos do polígono, respectivamente, adjacentes aos ângulos internos $\widehat{A_1}, \widehat{A_2}, \widehat{A_3}, \ldots, \widehat{A_n}$. Temos:

$$\begin{cases} a_1 + |\widehat{A_1}| = 180° \\ a_2 + |\widehat{A_2}| = 180° \\ \vdots \\ a_n + |\widehat{A_n}| = 180° \end{cases}$$

Somando-se estas igualdades membro a membro, obtemos:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + |\widehat{A_1}| + |\widehat{A_2}| + \cdots + |\widehat{A_n}| = n \cdot 180°$$

Como $|\widehat{A_1}| + |\widehat{A_2}| + \cdots + |\widehat{A_n}| = (n-2) \cdot 180°$, segue-se que

$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + n \cdot 180° - 2 \cdot 180° = n \cdot 180°$

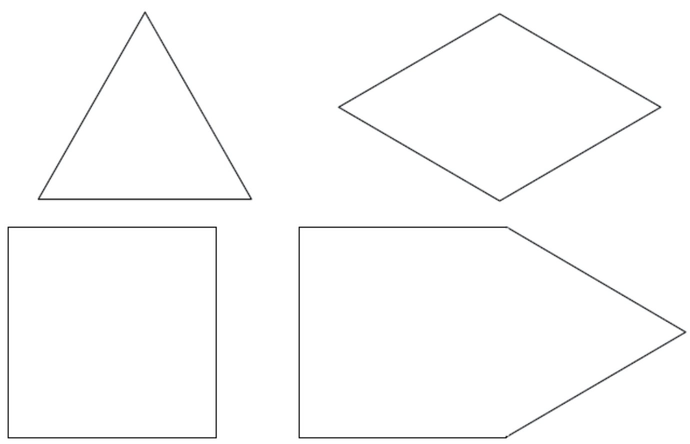
Cancelando-se $n \cdot 180°$ em ambos os membros, decorre que

$$\boxed{a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 360°}$$

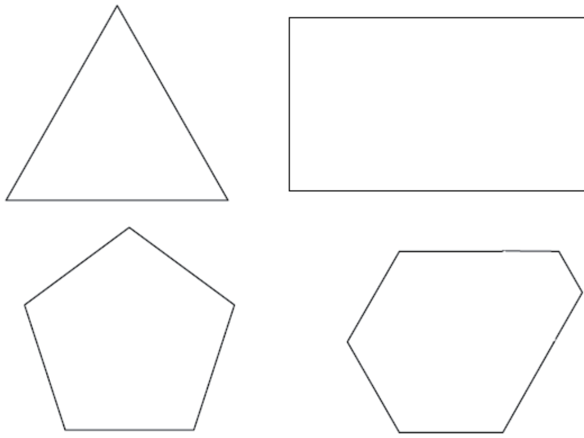
É isso aí. A soma dos ângulos externos de qualquer polígono é constante e igual a 360º.

Definição 33: Um polígono chama-se equilátero se seus lados têm mesma medida.

A seguir, veja alguns polígonos equiláteros.



Em seguida, alguns equiângulos.



Pelos exemplos de polígonos equiláteros e equiângulos que acabamos de apresentar, dá para perceber que nem todo polígono equilátero é equiângulo e que nem todo polígono equiângulo é equilátero. Concorda?

Definição 34: Quando um polígono é equilátero e equiângulo, dizemos que ele é regular.

Chama-se *base* de um polígono, um certo lado que é fixado como referencial em alguma discussão.

SÍNTESE DA UNIDADE

Definimos polígono. Classificamos os polígonos em côncavo e convexo. Demos a denominação dos polígonos quanto ao número de lados. Estabelecemos as propriedades gerais dos polígonos tais como número de diagonais, soma dos ângulos internos e soma dos ângulos externos. Por fim, definimos polígono regular.

PENSE

Descubra, dentre os exemplos anteriores, quais são os regulares.

ATIVIDADES DE AVALIAÇÃO

1. Se um determinado ângulo externo de um polígono convexo mede 60º, quanto vale a medida do ângulo interno a ele adjacente?
2. Calcule o número de diagonais de um polígono de n lados para $n = 6$, 7, 8, 9 e 10.
3. A diferença do número de diagonais de um polígono de $n + 1$ lados para o número de diagonais de um polígono de n lados é 15. Determine n.
4. O número de diagonais de um polígono é 44. Determine o número de lados desse polígono.
5. O número de diagonais de um polígono é 77. Determine o número de lados desse polígono.

6. Calcule a soma dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados para $n = 5, 6, 7, 8, 9$ e 10.

7. Calcule a medida do ângulo interno de um polígono convexo equiângulo de n lados para $n = 3, 4, 5, 6, 7$ e 8.

8. Determine o número de lados do polígono convexo cuja soma dos ângulos internos é igual 2340º.

9. Determine o número de lados do polígono convexo equiângulo cujos ângulos internos medem 160º.

10. Determine o número de diagonais do polígono convexo cuja soma dos ângulos internos é igual a 1620º.

11. Determine o número de diagonais do polígono convexo equiângulo cujos ângulos externos medem 40º.

12. Determine a soma dos ângulos internos do polígono convexo cujo número de diagonais é 54.

13. Calcule o ângulo formado por duas bissetrizes internas de dois ângulos consecutivos de um polígono convexo equiângulo de 8 lados.

14. Calcule o ângulo formado por duas bissetrizes internas de dois ângulos consecutivos de um polígono convexo equiângulo de n lados.

15. Seja *ABCD...* um polígono regular. Determine o número de diagonais desse polígono sabendo que as diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ formam um ângulo de 20º.

16. Desenhe um octógono equiângulo que não seja equilátero.

17. Desenhe um heptágono equilátero que não seja equiângulo.

Unidade 6

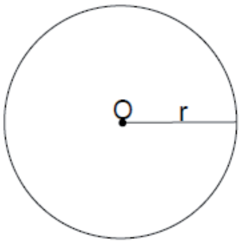
Circunferência

Objetivos:

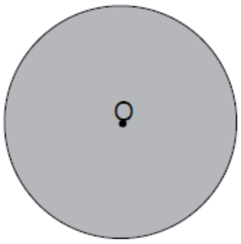
- Saber definir circunferência e disco.
- Conhecer os pontos notáveis de um triângulo e suas propriedades.
- Saber aplicar as propriedades das cordas de uma circunferência.
- Conhecer as posições relativas entre uma reta e uma circunferência, e, entre duas circunferências.
- Saber definir ângulo central, ângulo inscrito, ângulo semi-inscrito e arco, e, conhecer suas propriedades.
- Saber qual é a condição necessária e suficiente para que um quadrilátero seja inscritível assim como circunscritível.

Disco LP ou CD, anel, pneu e botão são objetos do nosso cotidiano que têm a forma de circunferência. Mas, afinal, qual é a definição de circunferência? Vejamos.

Definição 35: *Sejam O um ponto no plano e r um número real positivo. Chama-se circunferência ou círculo de centro O e raio r o conjunto dos pontos do plano cuja distância ao ponto O é igual a r.*

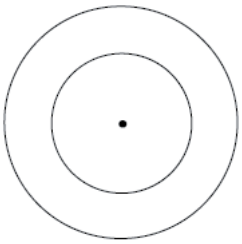


Chamamos de *disco* de centro O e raio r o conjunto dos pontos do plano cuja distância ao ponto O é menor do que ou igual a r.

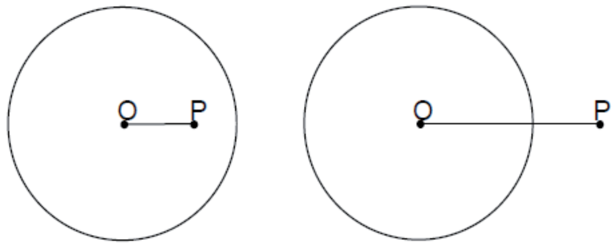


Se α é a circunferência de centro O e raio r, denotá-la-emos por $\alpha(O; r)$.

Duas circunferências são ditas *concêntricas* se possuem o mesmo centro.



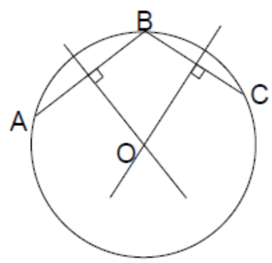
Dados uma circunferência $\alpha(O; r)$ e um ponto P no plano, diremos que P é um *ponto interior* ou *exterior* a α conforme a distância de P a O seja, respectivamente, menor ou maior do que r.



O conjunto de todos os pontos interiores a α é chamado de *interior de* α e é denotado por intα, e, o conjunto de todos os pontos exteriores a α é chamado de *exterior de* α e é denotado por extα.

Teorema 36: Por três pontos não alinhados passa uma única circunferência.

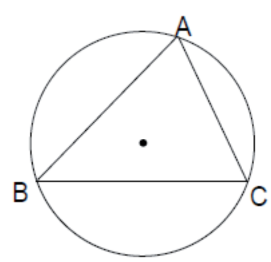
Prova: (Existência) Sejam A, B e C três pontos não colineares. As mediatrizes de $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são concorrentes. Seja O o ponto de concorrência delas.



Desse modo, O é equidistante de A, B e C e portanto é centro e OA é o raio de uma circunferência que passa por A, B e C.

(Unicidade) Seja O' o centro de uma circunferência que passa por A, B e C. Então, O' pertence às mediatrizes de $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$. Como essas mediatrizes já concorrem ao ponto O, segue-se que $O' = O$ e daí $\overline{O'A} = \overline{OA}$. Assim sendo, a circunferência de centro O' e raio $\overline{O'A}$ coincide com a circunferência de centro O e raio $\overline{OA}$, uma vez que têm o mesmo centro e mesmo raio.

Dado um triângulo ABC, a circunferência que passa por A, B e C chama-se *circunferência circunscrita* ao triângulo ABC. Seu centro chama-se *circuncentro* do triângulo.



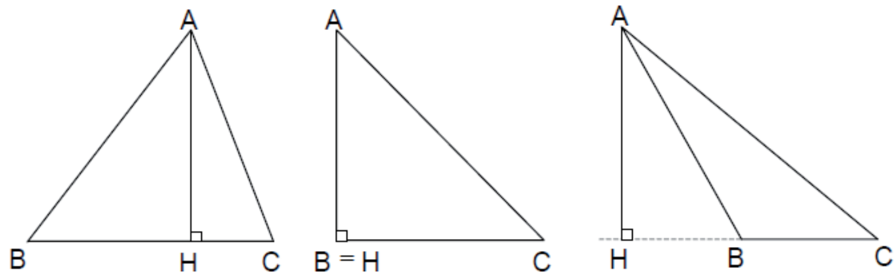
Definição 37: Chama-se altura de um triângulo, relativa a um lado, o segmento cujas extremidades são o vértice oposto e o ponto de interseção da reta que contém o lado com a perpendicular que passa no vértice.

ATENÇÃO

Observe que o disco é a união da circunferência com seu interior.

ANOTE

Note que o circuncentro é equidistante dos vértices do triângulo, consequentemente ele pertence às mediatrizes dos lados do triângulo. Portanto, as mediatrizes dos lados de qualquer triângulo concorrem a um mesmo ponto, que é o circuncentro do triângulo.

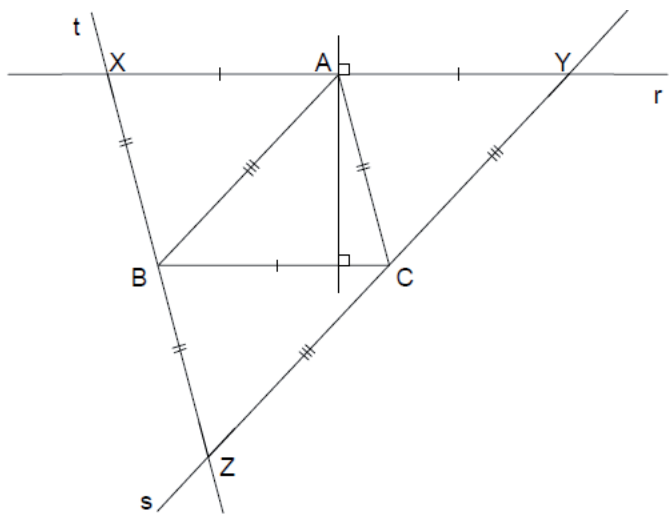


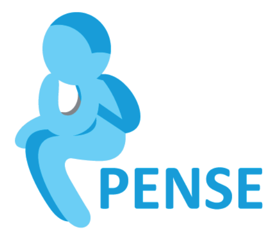
Em cada figura, $\overline{AH}$ é a altura do triângulo *ABC* relativa ao lado $\overline{BC}$. O ponto *H*, que é o ponto de interseção da reta $\overleftrightarrow{BC}$ com a perpendicular a $\overleftrightarrow{BC}$ passando por *A*, chama-se *pé da altura* do triângulo relativa ao lado $\overline{BC}$.

As retas que contêm as alturas de um triângulo também concorrem a um mesmo ponto. É o que garante o próximo teorema.

Teorema 38: As retas que contêm as alturas de um triângulo encontram-se num mesmo ponto, chamado de ortocentro do triângulo.

Prova: Sejam *ABC* um triângulo e *r*, *s* e *t* as respectivas paralelas aos lados $\overline{BC}$, $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ passando pelos vértices opostos. Sejam ainda $\{X\} = r \cap t$, $\{Y\} = r \cap s$ e $\{Z\} = s \cap t$.

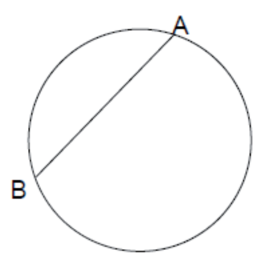




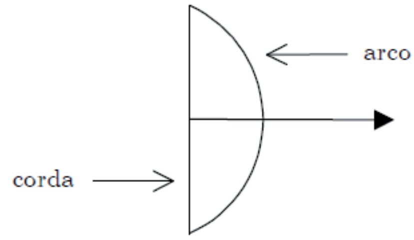
Sabe por que o nome corda?

Considerando os paralelogramos *XACB* e *AYCB*, vem, respectivamente, que *XA* = *BC* e *AY* = *BC*, donde, *A* é o ponto médio de $\overline{XY}$. De modo análogo, mostra-se que *B* e *C* são os pontos médios, respectivamente, de $\overline{YZ}$ e $\overline{XZ}$. Observe que as mediatrizes do triângulo *XYZ* são as retas que contêm as alturas do triângulo *ABC*. Portanto, concorrem a um mesmo ponto.

Chama-se *corda* de uma circunferência qualquer segmento de reta cujas extremidades pertencem à circunferência.



Uma das armas que os índios usam chama-se arco-e-flecha. A flecha é lançada com o auxílio do arco, que lembra uma parte de um círculo.



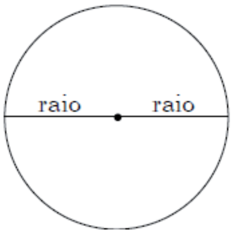
Presa às extremidades do arco há uma corda que é esticada para impulsionar a flecha. Eis a razão do nome.

Vale salientar que a mediatriz de qualquer corda contém o centro da circunferência, já que este é equidistante das extremidades da corda.

Chama-se *diâmetro* de uma circunferência o comprimento máximo que uma corda pode atingir.

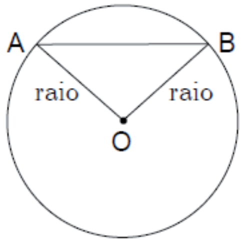
Vamos mostrar que o diâmetro de uma circunferência vale duas vezes o raio.

Com efeito, existem cordas que medem duas vezes o raio. Qualquer corda que passe no centro da circunferência vale duas vezes o raio.



3

Considere agora uma corda $\overline{AB}$ qualquer que não passa pelo centro O da circunferência.



Sabemos que todo lado de um triângulo é menor do que a soma dos outros dois. Logo, o lado AB do triângulo OAB é menor do que $OA + OB$ que é igual a duas vezes o raio.

Portanto, a corda, $\overline{AB}$ que não passa pelo centro, mede menos do que qualquer uma que passe nele.

DICA

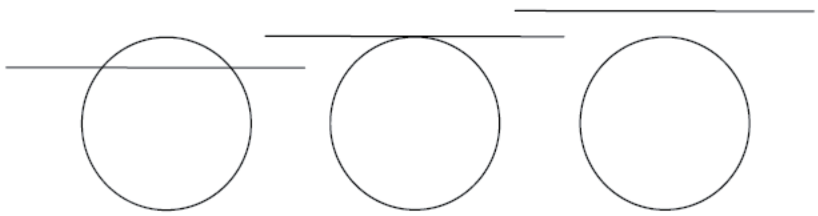
E por falar em arco, posteriormente vamos dar sua definição geométrica.

ANOTE

Assim sendo, o comprimento máximo que uma corda pode atingir, isto é, o diâmetro, é igual a duas vezes o raio.

6.1. Posições relativas entre uma reta e uma circunferência

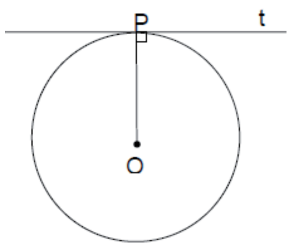
Definição 39: *Dadas uma reta e uma circunferência no plano, diremos que a reta é secante, tangente ou exterior à circunferência conforme a interseção da reta com a circunferência seja, respectivamente, dois pontos, um ponto ou nenhum ponto.*



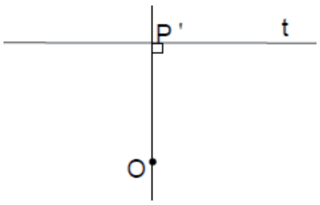
No caso da reta ser tangente à circunferência o ponto de interseção é chamado de *ponto de tangência* da reta com a circunferência.

No caso da reta secante, se A e B são os pontos de interseção da secante com a circunferência, então todos os pontos entre A e B são interiores e os demais, exceto A e B, são exteriores à circunferência.

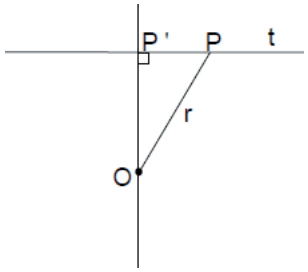
Teorema 40: Sejam α uma circunferência de centro O e raio r, t uma reta tangente a α e P o ponto de tangência. Então, $\overleftrightarrow{PO}$ é perpendicular a t.



Prova: Considere a reta perpendicular a t passando por O e seja P' o ponto de interseção dessa reta com t. Vamos mostrar que P' = P.

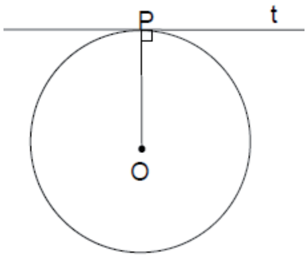


Se não fosse, teríamos um triângulo retângulo $OP'P$, onde $\overline{OP}$ é hipotenusa, conseqüentemente, o maior lado do triângulo.

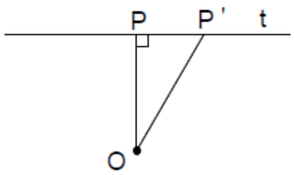


Como $OP = r$, então $OP' < r$, daí, P' pertenceria ao interior de α e, por conseguinte, t seria secante a α . Isto é impossível, já que t é tangente a α . Para evitar este absurdo, só há um jeito: $P' = P$. Portanto, $\overleftrightarrow{OP}$é perpendicular a t.

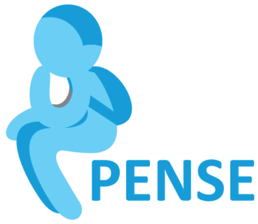
Teorema 41: Sejam α uma circunferência de centro O e raio r, t uma reta e P um ponto pertencente a t e a α tais que $\overleftrightarrow{PO}$é perpendicular a t. Então, t é tangente a α.



Prova: Seja $P' \in r$ tal que $P' \neq P$. Basta mostrarmos que P' é exterior a α.

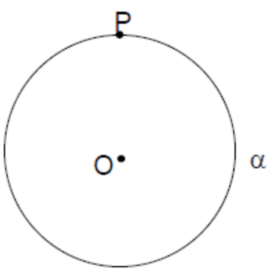


Considere o triângulo retângulo OPP', onde $\overleftrightarrow{OP'}$ é hipotenusa, conseqüentemente, o maior lado do triângulo. Como $OP = r$, então r < OP' e, portanto, P' é exterior a α.



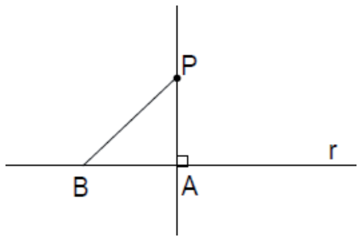
Concorda?

Dados uma circunferência $\alpha(O; r)$ e um ponto $P \in \alpha$ como desenhar com exatidão, usando-se régua e compasso, a reta tangente a α em P?



É simples. Já sabemos, utilizando régua e compasso, traçar a perpendicular a uma reta passando por um ponto pertencente a esta reta. Portanto, à luz do teorema anterior, é só traçar a perpendicular a $\overleftrightarrow{OP}$passando no ponto P.

Dados uma reta r e um ponto $P \notin r$, existe um único ponto de r que se situa a uma menor distância do ponto P. Ele é exatamente o ponto de interseção da reta r com a reta perpendicular a r passando por P. Com efeito, seja A esse ponto de interseção e $B \neq A$ um ponto qualquer pertencente a r.

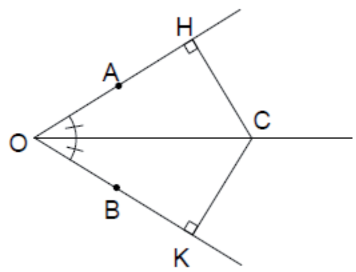


Desse modo, *ABP* é um triângulo retângulo em *A* (isto é, *A* é o ângulo reto de *ABP*). Como a hipotenusa é o maior lado de um triângulo retângulo, segue-se que *PA* < *PB*. Conclusão: dentre os pontos de *r*, aquele que está a uma menor distância de *P* é o ponto *A*, o qual será chamado de *pé da perpendicular* a *r* passando por *P*.

Definimos essa menor distância como sendo a *distância do ponto P à reta r*. Se *P* pertencesse a *r*, a *distância de P a r* seria definida como sendo zero. Usaremos a notação *d(P, r)* para indicar a distância de um ponto *P* a uma reta *r*.

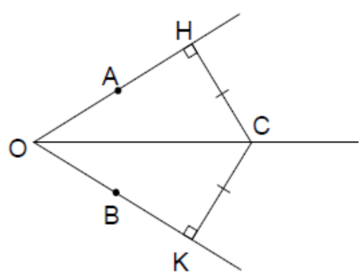
A bissetriz de um ângulo não raso é precisamente o conjunto dos pontos desse ângulo equidistantes das retas que contêm os lados do ângulo.

Sejam $A\hat{O}B$ um ângulo não raso e $C \neq O$ um ponto pertencente à bissetriz de $A\hat{O}B$.



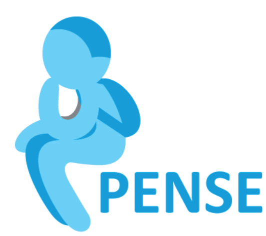
Sejam *H* e *K*, respectivamente, os pés das perpendiculares a $\overleftrightarrow{OA}$ e $\overleftrightarrow{OB}$ passando por *C*. Assim, temos: *OCH* ≡ *OCK* (L. A. A_o.) e daí *CH* = *CK*. Por conseguinte, *C* está a uma igual distância de $\overleftrightarrow{OA}$ e $\overleftrightarrow{OB}$.

Suponha agora que *C* é um ponto do ângulo $A\hat{O}B$, distinto de *O* e equidistante de $\overleftrightarrow{OA}$ e $\overleftrightarrow{OB}$.

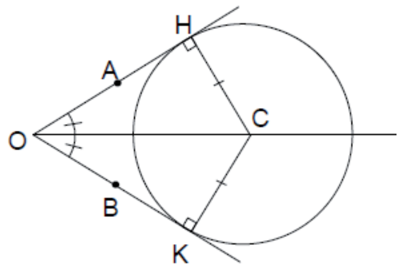


Sejam *H* e *K*, respectivamente, os pés das perpendiculares a $\overleftrightarrow{OA}$ e $\overleftrightarrow{OB}$ passando por *C*. Pelo caso A_r. L. L. de congruência de triângulos, decorre que OCH ≡ *OCK* e daí $C\hat{O}H \equiv C\hat{O}K$, isto é, C pertence à bissetriz de $A\hat{O}B$, como queríamos demonstrar.

Agora observe o seguinte: a circunferência de centro em *C* e raio *CH* é tangente aos lados do ângulo.

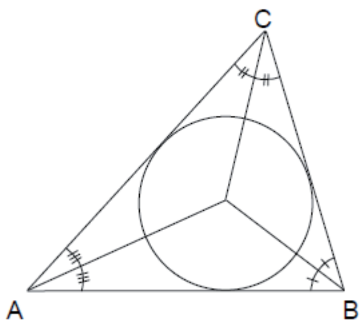


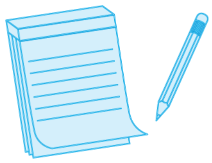
Concorda?



Enfim, temos: cada ponto pertencente à bissetriz de um ângulo não raso é centro de uma circunferência que tangencia seus lados, e, se os lados de um ângulo não raso são tangentes a um circunferência, então seu centro pertence à bissetriz desse ângulo.

Considere agora um triângulo ABC e seja I o ponto de encontro das bissetrizes dos ângulos $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$.





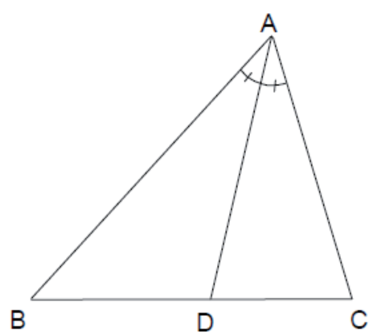
ANOTE

Veja: esse ponto é equidistante dos lados dos ângulos $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$, ou seja, dos lados do triângulo ABC.

Logo, I é centro de uma circunferência que tangencia os lados do triângulo, chamada de *circunferência inscrita* no triângulo ABC. I chama-se *incentro* de ABC. Note que, sendo I equidistante dos lados do ângulo $\widehat{C}$, ele também pertence à bissetriz de $\widehat{C}$.

Enfim, temos: as bissetrizes dos ângulos internos de qualquer triângulo concorrem a um mesmo ponto, o qual é centro da circunferência inscrita nesse triângulo.

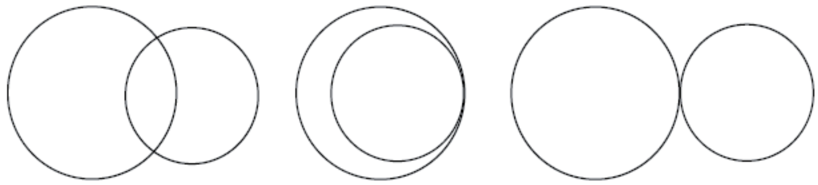
Definição 42: *Chamamos de bissetriz de um triângulo, relativa a um lado, o segmento de reta cujas extremidades são o vértice oposto a esse lado e o ponto de interseção da bissetriz do ângulo oposto com ele.*



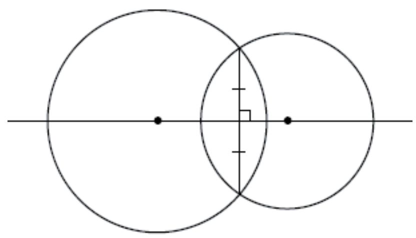
Na figura anterior, $\overline{AD}$ é bissetriz do triângulo ABC, relativa ao lado $\overline{BC}$. Conforme vimos, as três bissetrizes do triângulo encontram-se num mesmo ponto: o incentro.

6.2. Posições relativas entre duas circunferências

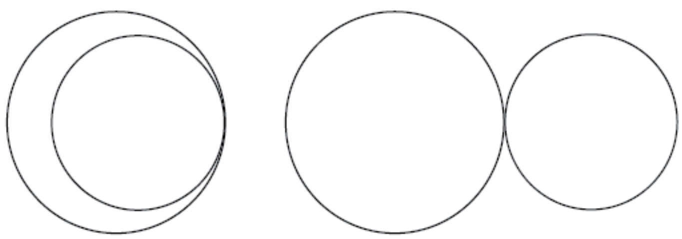
Definição 43: *Dadas duas circunferências no plano, diremos que elas são secantes ou tangentes conforme a interseção delas se constitua, respectivamente, em dois pontos ou em um só ponto.*



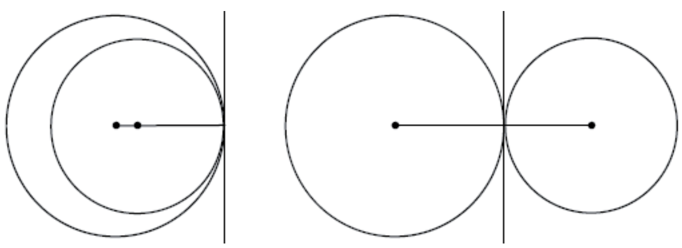
Note que a mediatriz do segmento que une os pontos de interseção de duas circunferências secantes passa pelos centros das mesmas.



No caso de duas circunferências tangentes, elas podem ser *tangentes interiores* ou *tangentes exteriores*, conforme mostram as figuras a seguir.



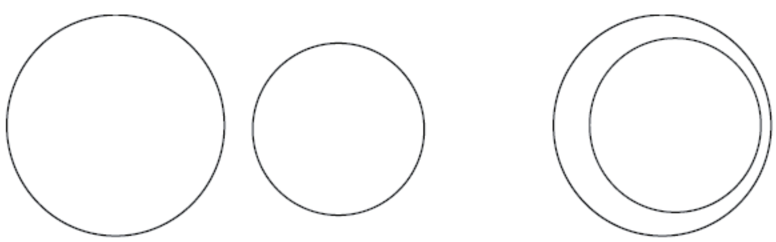
Em ambos os casos, os centros e o ponto de tangência estão alinhados.



PENSE

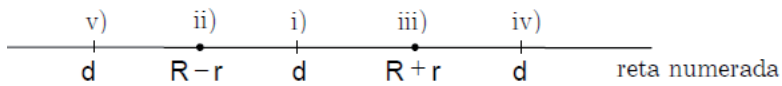
Descubra por que.

Mas, duas circunferências distintas podem não ser secantes e nem tangentes. Neste caso, elas não se interceptam e podem ser *exteriores* ou *uma é interior à outra*, conforme se vê a seguir.



Sejam r e R os raios de duas circunferências não concêntricas, em que $r \leq R$, e d a distância entre seus centros. Podemos caracterizar a posição relativa entre elas através de r, R e d. Veja a seguir.

i) Se elas são secantes, então $R - r < d < R + r$.
ii) Se elas são tangentes interiores, então $d = R - r$.
iii) Se elas são tangentes exteriores, então $d = R + r$.
iv) Se elas são exteriores, então $d > R + r$.
v) Se uma é interior à outra, então $d < R - r$.

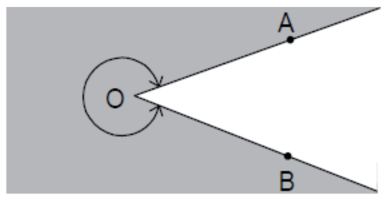


PENSE

Verifique você mesmo estas afirmações, a título de exercício

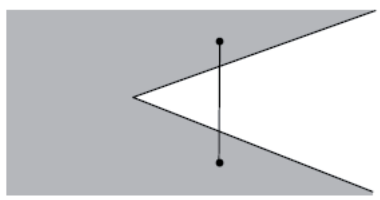
6.3. Ângulos de uma circunferência

Definição 44: *Seja $A\hat{O}B$ um ângulo não raso. O conjunto dos pontos do plano não pertencentes $A\hat{O}B$ mais os lados de $A\hat{O}B$ chamaremos de ângulo côncavo de lados $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ e de vértice O, o qual representaremos por $A\check{O}B$.*



Definimos a medida de $A\check{O}B$. como se segue: $A\check{O}B = 360° - |A\hat{O}B|$.

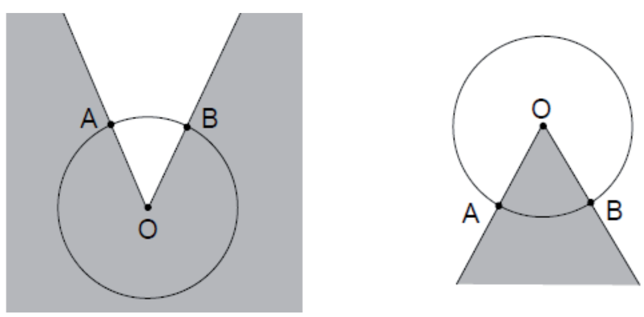
Note que $180° < |A\check{O}B| < 360°$e que, de fato, um ângulo côncavo é uma região côncava do plano.



ANOTE

Note também que os ângulos que até então considerávamos eram figuras convexas.

Definição 45: Chama-se ângulo central de uma circunferência qualquer ângulo côncavo ou convexo cujo vértice é o centro da circunferência.



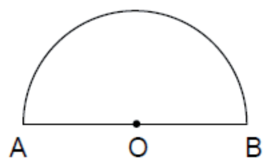
Definição 46: *Chama-se arco a interseção de um ângulo central com a circunferência.*

Se A e B são os pontos dos lados do ângulo central pertencentes à circunferência e C é um ponto distinto de A e de B pertencente ao arco, então este será denotado por $\widehat{ACB}$ ou simplesmente por $\widehat{AB}$.

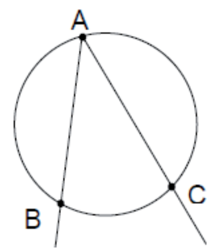
Definimos a medida do arco $\widehat{AB}$ e a indicamos por $|\widehat{AB}|$ como sendo a medida do ângulo central associado ($A\hat{O}B$ ou $A\check{O}B$).

Chamamos de *arco menor* $\widehat{AB}$ aquele associado ao ângulo central convexo $A\hat{O}B$ e de *arco maior* $\widehat{AB}$ aquele associado ao ângulo central côncavo $A\check{O}B$.

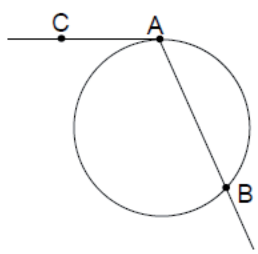
Chama-se *semi-circunferência* todo arco $\widehat{AB}$ cuja medida é 180º.



Definição 47: *Um ângulo convexo é dito inscrito em uma circunferência* α *se seu vértice pertence a* α *e as retas que contêm seus lados são secantes a* α.



Definição 48: *Um ângulo convexo é dito semi-inscrito em uma circunferência* α *se seu vértice pertence a* α *e a reta que contém um de seus lados é secante e a que contém o outro é tangente a* α.



A cada ângulo inscrito $B\hat{A}C$ numa circunferência α, em que $B,C \in \alpha$, associamos um arco, a saber: o arco $\widehat{BC}$ que não contém A, e, a cada ângulo semi-inscrito $B\hat{A}C$ associamos o arco que é a interseção do próprio ângulo com α.

Se um arco está associado a um ângulo inscrito ou semi-inscrito, dizemos que o *ângulo subtende o arco.*

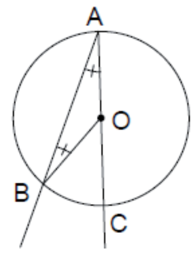
Teorema 49: Todo ângulo inscrito numa circunferência vale a metade de seu arco associado.

Prova: Seja O o centro de uma circunferência α e seja $B\hat{A}C$ um ângulo inscrito em α, em que $B,C \in \alpha$. Devemos mostrar que $|B\hat{A}C| = \frac{1}{2}|\widehat{BC}|$, em que $\widehat{BC}$ é o arco associado a $B\hat{A}C$. Distinguiremos três casos:

ATENÇÃO

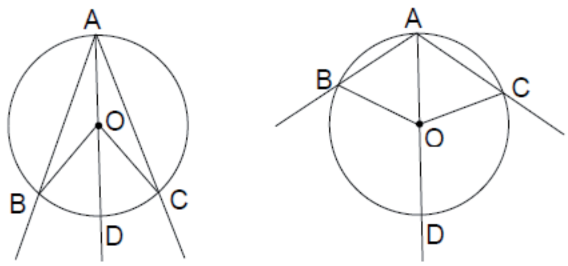
Observe que todo ângulo inscrito ou semiinscrito numa circunferência não é raso.

Caso 1. O pertence a um dos lados do ângulo. Digamos que $O \in \overline{AC}$. Temos que o ângulo central $B\hat{O}C$ é externo ao triângulo isósceles OAB, logo, sua medida é duas vezes a medida de $B\hat{A}C$, donde, $|B\hat{A}C| = \frac{1}{2}|B\hat{O}C|$.



Mas, $|B\hat{O}C| = |\widehat{BC}|$, portanto, $|B\hat{A}C| = \frac{1}{2}|\widehat{BC}|$.

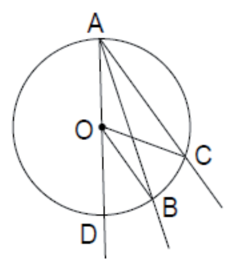
Caso 2. $O \in B\hat{A}C$ e não pertence a nenhum lado. Seja B $\neq A$ o outro ponto de interseção de $\overleftrightarrow{OA}$ com α.



Há duas possibilidades: $\widehat{BC} = B\hat{O}C \cap \alpha$ ou $\widehat{BC} = B\check{O}C \cap \alpha$. Em ambas as possibilidades temos que $|\widehat{BC}| = |B\hat{O}D| + |D\hat{O}C|$.

Pelo caso 1, decorre que $|B\hat{A}D| = \frac{1}{2}|B\hat{O}D|$ e $|D\hat{A}C| = \frac{1}{2}|D\hat{O}C|$. Assim sendo, segue-se que $|B\hat{A}C| = |B\hat{A}D| + |D\hat{A}C| = \frac{1}{2}|B\hat{O}D| + \frac{1}{2}|D\hat{O}C| = \frac{1}{2}(|B\hat{O}D| + |D\hat{O}C|) = \frac{1}{2}|\widehat{BC}|$.

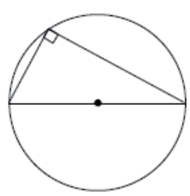
Caso 3. $O \notin B\hat{A}C$. Seja $B \neq A$ o outro ponto de interseção de $\overleftrightarrow{OA}$ com α. Temos que $|B\hat{A}C| = |D\hat{A}C| - |D\hat{A}B|$.



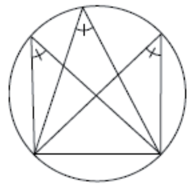
Pelo caso 1, vem que $|D\hat{A}C| = \frac{1}{2}|D\hat{O}C|$ e $|B\hat{A}D| = \frac{1}{2}|B\hat{O}D|$. Por conseguinte, $|B\hat{A}C| = |D\hat{A}C| - |B\hat{A}D| = \frac{1}{2}|D\hat{O}C| - \frac{1}{2}|B\hat{O}D| = \frac{1}{2}(|D\hat{O}C| - |B\hat{O}D|) = \frac{1}{2}|\widehat{BC}|$.

SAIBA MAIS

Como consequência deste teorema, podemos concluir que todo ângulo inscrito que subtende uma semi-circunferência é reto.



Temos também que ângulos inscritos que subtendem o mesmo arco são congruentes, pois medem a metade do arco.

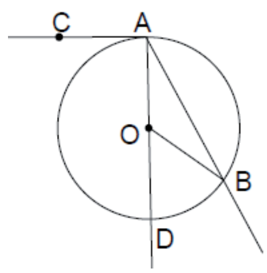


Teorema 50: Todo ângulo semi-inscrito numa circunferência vale a metade de seu arco associado.

Prova: Seja O o centro de uma circunferência α e seja BÂC um ângulo semi-inscrito em α, em que B $\in$ α. Seja $\widehat{AB}$ o arco associado. Devemos mostrar que $|B\hat{A}C| = \frac{1}{2}|\widehat{AB}|$. Distinguimos três casos:

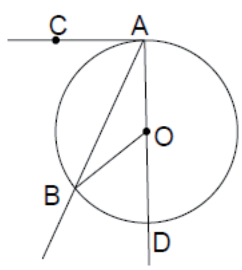
Caso 1. $O \in \overleftrightarrow{AB}$. Veja que o ângulo $A\hat{O}B$ é raso, logo, $|\widehat{AB}|$ = 180º. Como $\overleftrightarrow{AC}$ é tangente a α em A, segue-se que $\overleftrightarrow{AB}$ é perpendicular a $\overleftrightarrow{AC}$ e portanto $|B\hat{A}C|$ = 90º. Logo, $|B\hat{A}C| = \frac{1}{2}|\widehat{AB}|$.

Caso 2. $O \in B\hat{A}C$ e $O \neq \overleftrightarrow{AB}$. Seja $D \neq A$ o outro ponto de interseção de $\overleftrightarrow{OA}$ com α.

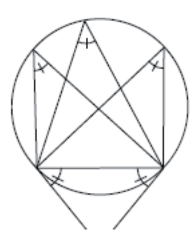


Temos, pelo caso 1, que $|C\hat{A}D| = \frac{1}{2}|\widehat{AD}|$., e, pelo teorema anterior, temos que $|D\hat{A}B| = \frac{1}{2}|\widehat{BD}|$. Assim sendo, $|B\hat{A}C| = |C\hat{A}D| + |D\hat{A}B| = \frac{1}{2}(|\widehat{AD}| + |\widehat{BD}|) = \frac{1}{2}|\widehat{AB}|$.

Caso 3. $O \notin B\hat{A}C$. Seja $D \neq A$ o outro ponto de interseção de $\overleftrightarrow{OA}$ com α.



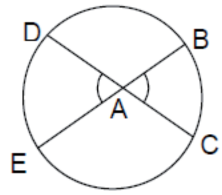
Temos, pelo caso 1, que $|C\hat{A}D| = \frac{1}{2}|\widehat{AD}|$, e, pelo teorema anterior, temos que $|D\hat{A}B| = \frac{1}{2}|\widehat{BD}|$.. Assim sendo, $|B\hat{A}C| = |C\hat{A}D| - |D\hat{A}B| = \frac{1}{2}(|\widehat{AD}| - |\widehat{BD}|) = \frac{1}{2}|\widehat{AB}|$.

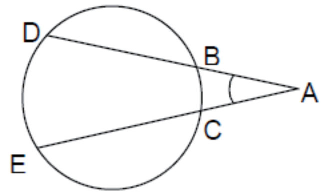


SAIBA MAIS

Como consequência desses dois teoremas, podemos concluir que ângulos inscritos ou semi-inscritos que subtendem o mesmo arco são congruentes, pois medem metade do arco.

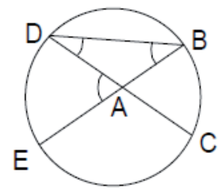
Vamos agora considerar o caso em que o vértice A de um ângulo, cujas retas contendo os lados são secantes a uma circunferência α, não pertence a α. Há duas possibilidades: $A \in \text{int}\alpha$ ou $A \in \text{ext}\alpha$. Veja a seguir.





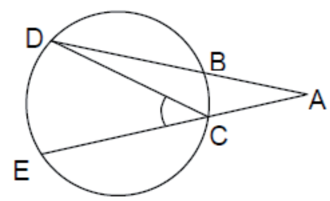
Demonstraremos, no primeiro caso, que $|\hat{A}| = \frac{1}{2}(|\widehat{DE}| + |\widehat{BC}|)$ e, no segundo, que $|\hat{A}| = \frac{1}{2}(|\widehat{DE}| - |\widehat{BC}|)$, em que estamos considerando os arcos menores $\widehat{DE}$ e $\widehat{BC}$.

No primeiro caso, considere o segmento $\overline{DB}$. Temos que $\hat{A}$ é um ângulo externo do triângulo ABD, logo, $|\hat{A}| = |E\hat{B}D| + |C\hat{D}B|$.



Desde que $|E\hat{B}D| = \frac{1}{2}|\widehat{DE}|$ e $|C\hat{D}B| = \frac{1}{2}|\widehat{BC}|$, segue-se que $|\hat{A}| = \frac{1}{2}|\widehat{DE}| + \frac{1}{2}|\widehat{BC}|$, ou seja, $|\hat{A}| = \frac{1}{2}(|\widehat{DE}| + |\widehat{BC}|)$.

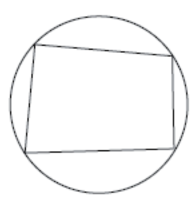
No segundo caso, considere o segmento $\overline{DC}$. Então, $E\hat{C}D$ é externo ao triângulo ACD, portanto, $|E\hat{C}D| = |\hat{A}| + |C\hat{D}B|$.



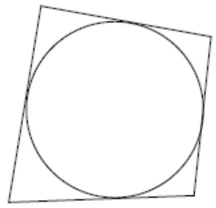
Posto que $|E\hat{C}D| = \frac{1}{2}|\widehat{DE}|$ e $|C\hat{D}B| = \frac{1}{2}|\widehat{BC}|$, vem que $\frac{1}{2}|\widehat{DE}| = |\hat{A}| + \frac{1}{2}|\widehat{BC}|$, daí, $|\hat{A}| = \frac{1}{2}|\widehat{DE}| - \frac{1}{2}|\widehat{BC}|$, isto é, $|\hat{A}| = \frac{1}{2}(|\widehat{DE}| - |\widehat{BC}|)$, como queríamos demonstrar.

6.4. Quadriláteros inscritíveis e circunscritíveis

Definição 51: Um quadrilátero chama-se inscritível se seus vértices pertencem a uma circunferência.



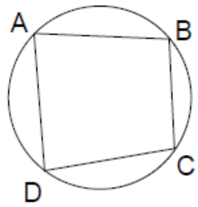
Definição 52: Um quadrilátero é dito circunscritível se seus lados são tangentes a uma circunferência.



Os dois teoremas seguintes irão caracterizar os quadriláteros inscritíveis e os quadriláteros circunscritíveis.

Teorema 53: *Um quadrilátero só é inscritível se seus ângulos opostos são suplementares.*

Prova: Inicialmente, vamos considerar um quadrilátero *ABCD*, inscritível. Devemos provar que $|\widehat{A}| + |\widehat{C}| = 180^\circ = |\widehat{B}| + |\widehat{D}|$. Como a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é igual a 360º, basta mostrarmos que $|\widehat{A}| + |\widehat{C}| = 180^\circ$. De acordo?



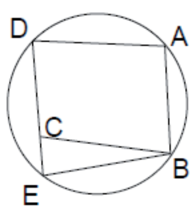
Veja: o ângulo Â subtende o arco $\widehat{BCD}$ e o ângulo $\widehat{C}$ subtende o arco $\widehat{BAD}$, logo, $|\widehat{A}| = \frac{1}{2}|\widehat{BCD}|$ e $|\widehat{C}| = \frac{1}{2}|\widehat{BAD}|$. Acontece que a soma desses arcos dá 360°.

$$|\widehat{A}|+|\widehat{C}| = \frac{1}{2}|\widehat{BCD}|+\frac{1}{2}|\widehat{BAD}| = \frac{1}{2}\left(|\widehat{BCD}| + |\widehat{BAD}|\right) = \frac{1}{2}\cdot 360 = 180^\circ$$

Assim, está demonstrado que se um quadrilátero é inscritível, então seus ângulos opostos são suplementares.

Vamos agora supor que um quadrilátero *ABCD* não é inscritível. Devemos provar que seus ângulos opostos não são suplementares. Com base no *Teorema 36*, por *A*, *B* e *D* passa uma única circunferência α. Como estamos supondo que o quadrilátero *ABCD* não é inscritível, então $C \notin \alpha$. Iremos considerar dois casos:

Caso 1. $C \in \text{int}\alpha$. Temos que $\overleftrightarrow{DC}$ é secante a α.

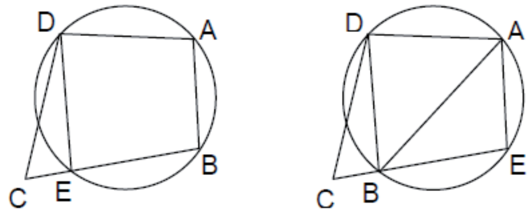


Seja $E \neq D$ tal que $E \in \alpha \cap \overleftrightarrow{DC}$. O quadrilátero *ABED* é inscritível, logo, $|\hat{A}| + |\hat{E}| = 180^\circ$. Entretanto, o ângulo $\widehat{C}$ é externo ao triângulo *BCE*, por conseguinte, $|\widehat{C}| > |\widehat{E}|$ e daí $|\widehat{A}| + |\widehat{C}| > 180^\circ$. Assim sendo, $\widehat{A}$ e $\widehat{C}$ não são suplementares.

Caso 2. $C \in \text{ext}\alpha$. Consideremos $\overleftrightarrow{BC}$ secante a α. Seja $E \neq B$ tal que $E \in \alpha \cap \overleftrightarrow{BC}$.

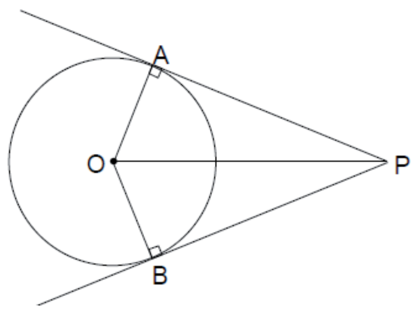
SAIBA MAIS

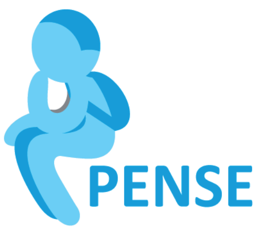
Eles são aplicações dos resultados que até então estabelecemos acerca de ângulos inscritos numa circunferência e retas tangentes a esta circunferência.



Pode ser que E esteja entre B e C ou B esteja entre C e E. Admitamos, primeiramente, que E situe-se entre B e C. O quadrilátero $ABED$ é inscritível, logo, $|\hat{A}| + |\hat{E}| = 180°$. Mas, $\hat{E}$ é um ângulo externo ao triângulo CDE, portanto, $|\widehat{E}| > |\widehat{C}|$, donde, $|\widehat{A}| + |\widehat{C}| < 180°$. Por conseguinte, $\widehat{A}$ e $\widehat{C}$ não são suplementares. Suponhamos agora que B esteia entre E e C. O quadrilátero $AEBD$ é inscritível, portanto, $|D\widehat{A}E| + |D\widehat{B}E| = 180°$. Desde que $|D\widehat{A}E| > |D\widehat{A}B|$ e $|D\widehat{B}E| > |\widehat{C}|$, segue-se que $|D\widehat{A}B| + |\widehat{C}| < 180°$. Logo, os ângulos $\widehat{A}$ e $\widehat{C}$ do quadrilátero $ABCD$ não são suplementares. Considere agora $\overleftrightarrow{BC}$ tangente a α e chegue à mesma conclusão.

Considere uma circunferência $\alpha(O, r)$ e um ponto $P \in \text{ext}\alpha$. Sejam A e B pertencentes a α tais que $\overleftrightarrow{PA}$ e $\overleftrightarrow{PB}$ sejam retas tangentes a α.





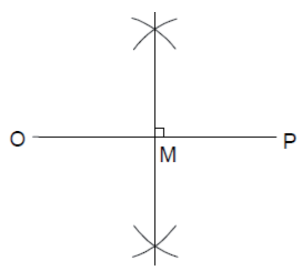
Correto?
Se não, então vejamos como.

Temos que $\overleftrightarrow{OA}$ é perpendicular a $\overleftrightarrow{PA}$ e $\overleftrightarrow{OB}$ é perpendicular a $\overleftrightarrow{PB}$. Desse modo, os triângulos OAP e OBP são retângulos e são congruentes pelo caso A. L. L. para triângulos retângulos. Por conseguinte, $PA = PB$.

Conclusão: as distâncias de um ponto P, exterior a uma circunferência, aos respectivos pontos de tangência das retas tangentes a ela passando por P, são iguais.

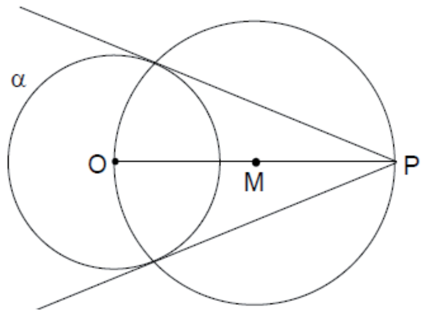
A propósito, você saberia desenhar com exatidão, utilizando régua e compasso, as retas tangentes a uma circunferência α passando por um ponto $P \in \text{ext}\alpha$, sendo dados α e P?

Primeiramente, encontremos o ponto médio do segmento que une P ao centro O da circunferência. Para isso, basta você centrar o compasso em O e com a abertura do compasso maior do que a metade de OP traçar uma pequena curva acima e abaixo da reta $\overleftrightarrow{OP}$. Em seguida, fazer o mesmo agora com a ponta de ferro do compasso no ponto P de tal maneira que os pequenos arcos se cruzem como mostra a figura seguinte:



A reta que passa por esses dois pontos de interseção dos arcos, na verdade, é a mediatriz do segmento de reta $\overline{OP}$. Deixamos a seu cargo a tarefa de justificar porque essa reta é a mediatriz de $\overline{OP}$. Conseqüentemente, o ponto de interseção dela com $\overline{OP}$ é o ponto médio M de $\overline{OP}$.

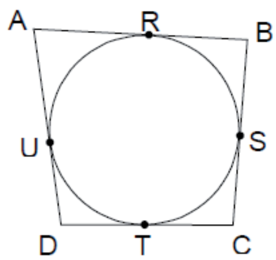
Prosseguindo com a construção, centre o compasso agora no ponto M e trace a circunferência com raio MO.



Os pontos de interseção dessas circunferências são os pontos de tangência das retas passando por P e tangentes a a.

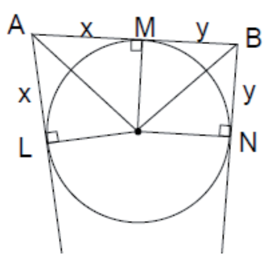
Teorema 54: Um quadrilátero só é circunscritível se as somas dos lados opostos são iguais.

Prova: Inicialmente, vamos admitir que um quadrilátero $ABCD$ é circunscritível. Devemos mostrar que AB + CD = AD + BC. Sejam R, S, T e U, respectivamente, os pontos de tangência dos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$ à circunferência inscrita no quadrilátero.



Em virtude do que há pouco discutimos, temos que $AU = AR$, BR = BS, CS = CT e DT = DU. Desse modo, segue-se que $AB + CD = (AR + RB) + (CT + TD) = AU + BS + CS + DU = (AU + UD) + (BS + SC) = AD + BC$, ou seja, as somas dos lados opostos são iguais.

Suponhamos agora que $ABCD$ é um quadrilátero não circunscritível. Provaremos que as somas dos lados opostos são desiguais. Seja O o ponto de encontro das bissetrizes dos ângulos $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$.

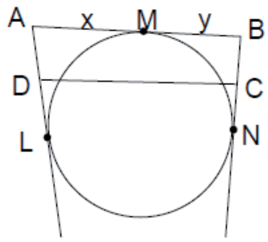


Temos que O é equidistante dos lados dos ângulos $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$. Conseqüentemente, O é centro de uma circunferência α que tangencia os lados desses ângulos. Sejam $L \in \overrightarrow{AD}$, $M \in \overline{AB}$ e $N \in \overrightarrow{BC}$ os pontos de tangência. Sabemos que $AL = AM$ e $BM = BN$. Sejam $x = AL = AM$ e $y = BM = BN$.

PENSE

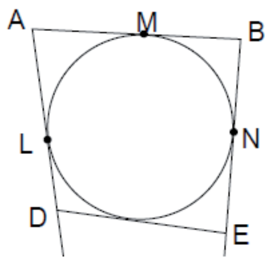
Descubra por que.

Caso 1. $D \in \overline{AL}$ e $C \in \overline{BN}$.

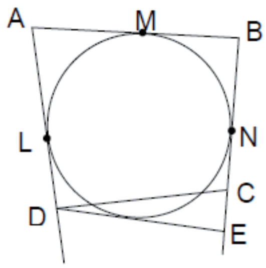


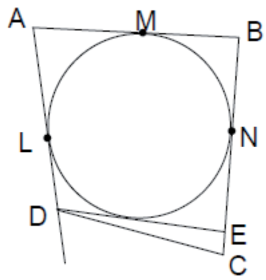
Nesse caso, temos: $AD + BC \leq x + y = AB < AB + CD$ e, portanto, as somas dos lados opostos são desiguais.

Caso 2. $D \notin \overline{AL}$ ou $C \notin \overline{BN}$. Admitamos que $D \notin \overline{AL}$. Seja E o ponto de interseção de $\overline{BN}$ com a outra reta tangente a α passando por D. Desse modo, $ABED$ é um quadrilátero circunscritível.



Como já demonstramos que as somas dos lados opostos de um quadrilátero circunscritível são iguais, segue-se que $AB + ED = AD + BE$. Posto que o quadrilátero $ABCD$ não é circunscritível, não podemos ter $C = E$. Logo, C está entre B e E ou E se localiza entre B e C.





Se C está entre B e E, temos: $AD + BC = AD + (BE - CE) = (AD + BE) - CE = (AB + ED) - CE = AB + (ED - CE)$, donde, $AD + BC = AB + (ED - CE)$. Utilizando a desigualdade triangular no triângulo CDE, vem que $ED < CE + CD$ e daí $ED - CE < CD$. Portanto, $AD + BC = AB + (ED - CE) < AB + CD$, logo, as somas dos lados opostos do quadrilátero $ABCD$ são desiguais. Para finalizar, suponhamos agora que E se localiza entre B e C. Nesse caso, temos: $AD + BC = AD + BE + EC = AB + ED + EC$. Usando a desigualdade triangular no triângulo CDE, decorre que $ED + EC > CD$, e, portanto, $AB + ED + EC > AB + CD$. Desde que $AD + BC = AB + ED + EC$, segue-se que $AD + BC > AB + CD$. Por conseguinte, as somas dos lados opostos de $ABCD$ não são iguais.

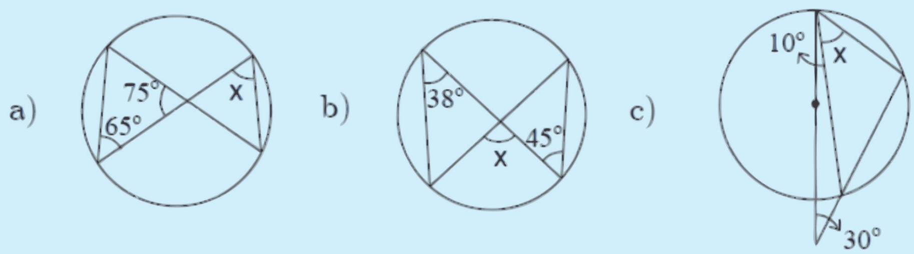
SÍNTESE DA UNIDADE

Definimos circunferência e disco. Estabelecemos teoremas que envolvem os seguintes pontos notáveis dos triângulos: circuncentro, ortocentro e incentro. Vimos o que pode ser a interseção de uma reta com uma circunferência e a interseção entre duas circunferências. Demos os teoremas que estabelecem as propriedades dos ângulos inscritos e semi-inscritos numa circunferência. Ao final, enunciamos e demonstramos teoremas que estabelecem condição necessária e suficiente para que um quadrilátero seja inscritível bem como circunscritível.

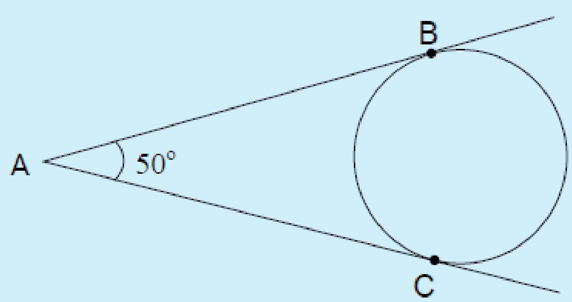
ATIVIDADES DE AVALIAÇÃO

1. Por que a mediatriz de qualquer corda de uma circunferência passa pelo seu centro?
2. Onde está o circuncentro de um triângulo retângulo?
3. Construa, usando régua e compasso, um triângulo retângulo com a hipotenusa medindo 5cm e um cateto medindo 4cm.
4. Os raios de duas circunferências medem, respectivamente, 16cm e 10cm. Seja d a distância entre seus centros. Dê a posição relativa entre elas nos seguintes casos de d:

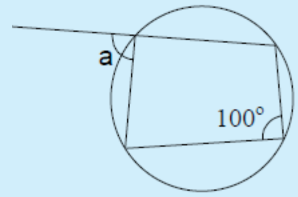
   a) d = 33 cm ; b) d = 5 cm ; c) d = 22 cm ; d) d = 25 cm ; e) d = 3 cm.
5. Determine o valor de x em cada figura.



6. Na figura, calcule a medida do arco maior $\widehat{BC}$.



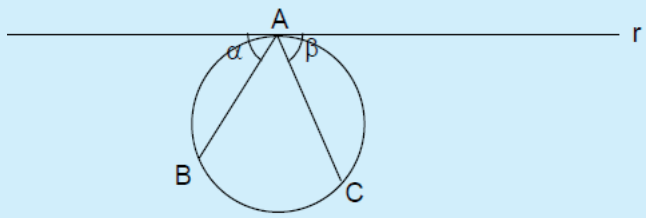
7. Na figura, calcule o valor de α.



8. Determine a medida do ângulo $\hat{A}$ do triângulo ABC, sabendo que as bissetrizes de $\hat{B}$ e $\hat{C}$ formam um ângulo de 100°.

9. Em um triângulo retângulo, a altura e a bissetriz relativas à hipotenusa formam um ângulo de 14°. Determine os ângulos agudos desse triângulo.

10. Determine a razão entre os ângulos α e β da figura a seguir, sabendo que a reta r tangencia a circunferência no ponto A e que as medidas dos arcos $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$ e $\overset{\frown}{AC}$ são diretamente proporcionais a 5, 4 e 9, respectivamente.



11. Seja ABC um triângulo em que $AB = AC$. Mostre, em relação ao lado $\overline{BC}$, que:

(a) a bissetriz é altura e mediana;

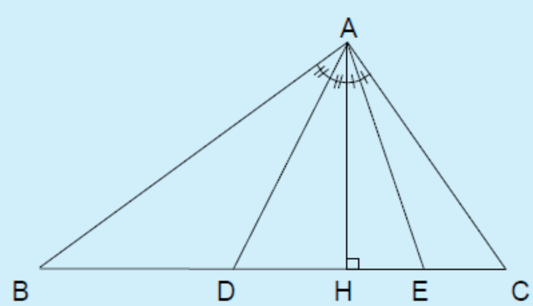
(b) a mediana é bissetriz e altura;

(c) a altura é mediana e bissetriz.

12. Demonstre que um triângulo só é equilátero se seu ortocentro coincide com seu circuncentro.

13. Demonstre que os centros de três circunferências de mesmo raio e tangentes exteriores entre si são vértices de um triângulo equilátero.

14. Na figura $B\hat{A}C$ é reto, $\overline{AH}$ é altura e $\overline{AD}$ e $\overline{AE}$ são bissetrizes, respectivamente, de BAH e HAC. Demonstre que os triângulos BAE e CAD são isósceles.



15. Sejam α a hipotenusa de um triângulo retângulo, p seu semiperímetro e r o raio da circunferência inscrita no triângulo. Mostre que $r = p - a$.

16. Sejam r e R, respectivamente, os raios das circunferências inscrita e circunscrita a um triângulo retângulo de catetos b e c. Demonstre que

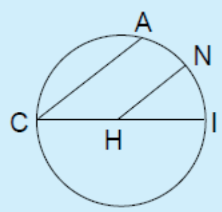
$$r + R = \frac{b+c}{2}$$

17. Prove que um trapézio, cujos lados transversos não são paralelos, só é inscritível se for isósceles.

18. Prove que um paralelogramo só é inscritível se for um retângulo.

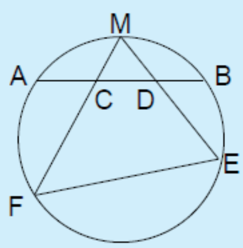
19. Prove que um paralelogramo só é circunscritível se for um losango.

20. Na figura, H é o centro da circunferência e $\overline{CA}$ e $\overline{HN}$ são paralelos. Mostre que $\widehat{AN}$ e $\widehat{NI}$ têm a mesma medida.

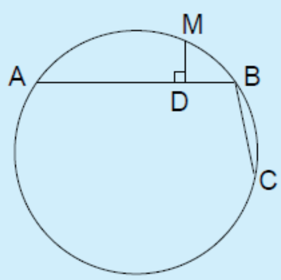


21. Demonstre que a bissetriz é igual ou menor do que a mediana, relativas a um mesmo lado.

22. Na figura, $AM = MB$. Mostre que $CDEF$ é inscritível.



23. Na figura, $AM = MC$ e $\overleftrightarrow{MD}$ é perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$. Mostre que AD = AB + BC.



24. Demonstre que num triângulo retângulo em A,o pé da altura $\overline{AH}$, o vértice A e os pontos médios dos catetos pertencem a uma mesma circunferência.

Unidade 7

Área

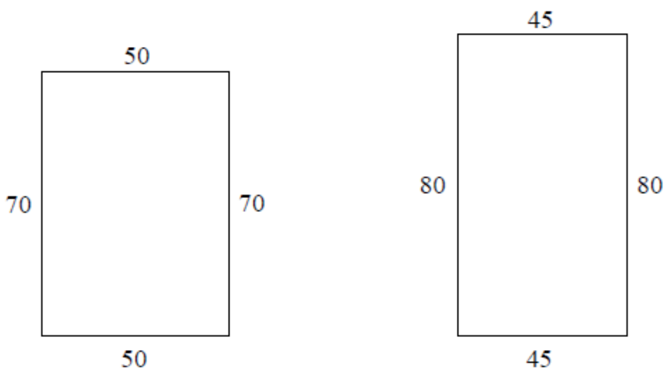
Objetivos:

- Compreender o conceito de área.
- Conhecer as fórmulas básicas que dão as áreas do triângulo e dos
- principais quadriláteros e saber aplicá-las.
- Saber aplicar o método de Euclides para resolver equações do tipo ax = b no universo dos números reais positivos.

A idéia de medição de área surgiu da necessidade de se mensurar extensão de terras. Por exemplo, suponha que uma pessoa A possui um terreno em forma retangular medindo 50m por 70m e outra, B, tem um, também em forma retangular, medindo 45m por 80m.

PENSE

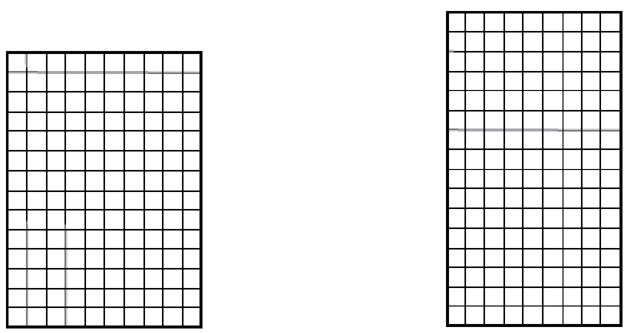
Qual delas tem maior terreno?



Como comparar os dois terrenos? Vamos lançar uma idéia. Façamos o seguinte: dividamos os lados dos retângulos em partes iguais a 5m. Em seguida, liguemos com segmentos de reta os pontos de divisão correspondentes em lados opostos, assim:

PENSE

Qual dos dois terrenos contém mais quadrados de lado igual a 5m?



Evidentemente, aquele que contiver mais será o maior terreno.

De acordo?

Vamos, portanto, contar. No primeiro terreno, em cada fila horizontal, há 10 quadrados de lado medindo 5m. Como esse terreno é composto por 14 dessas filas, então, ao todo, são 14 vezes 10 quadrados de lado igual a 5m. Por conseguinte, o primeiro terreno se compõe de 140 quadrados de lado medindo 5m.

Vejamos agora se o segundo terreno contém mais de 140 desses quadrados ou não. É só contarmos. Nesse terreno, cada fila horizontal se constitui de 9 quadradinhos. Como ele é formado por 16 dessas filas, logo, ele contém 16 vezes 9 quadrados de lado medindo 5m, ou seja, 144 desses quadrados. Por conseguinte, a pessoa B tem um maior terreno.

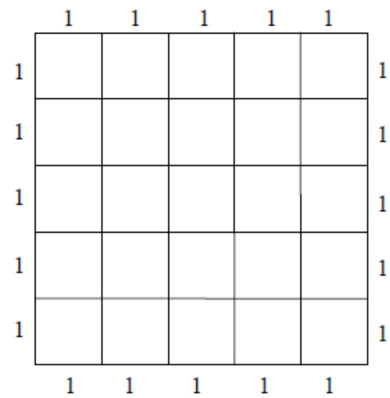
A idéia que acabamos de utilizar para comparar as áreas dos terrenos, é empregada para medirmos áreas das figuras geométricas planas. Consiste, precisamente, em determinarmos quantas vezes uma figura contém o quadrado de lado unitário. Essa quantidade de vezes é o que definimos por *área* de uma figura geométrica plana.

O quadrado de lado unitário é, portanto, a *unidade de medida de área*. Se a unidade de medida de comprimento considerada é o metro, por exemplo, dizemos que a área do quadrado de lado medindo um metro é um *metro quadrado*, que denotaremos por $1m^2$.

Vejamos. Aquele quadrado tem o lado medindo 5m. A figura seguinte é uma ampliação dele.

PENSE

A propósito, quantos metros quadrados tem aquele quadrado que usamos para comparar os terrenos?



Dividindo cada lado em partes iguais a 1m e, em seguida, ligando os pontos de divisão correspondentes em lados opostos com segmentos de reta, vemos que o quadrado tem, exatamente, 25 m^2. Essa é a área do quadrado de lado 5m.

PENSE

Quais são as áreas dos terrenos em m^2?

Ora, o primeiro, conforme já calculamos, é constituído de 140 quadrados de lado medindo 5m e o segundo se compõe de 144 desses quadrados. Com cada um desses quadrados, por sua vez, tem 25 metros quadrados, então o primeiro terreno tem $(140 \times 25)m^2$ e o segundo $(144 \times 25)m^2$, ou seja, suas áreas são, respectivamente, 3500 m^2 e 3600 m^2.

Agora, observe o seguinte: se multiplicarmos os comprimentos dos lados adjacentes do primeiro terreno, isto é, 70 x 50, obtemos 3500. Se fizermos o mesmo com as dimensões do segundo terreno, obtemos 80 x 45 = 3600. Vemos aí que quando multiplicamos os lados consecutivos de cada terreno, que tem a forma retangular, obtemos sua área.

PENSE

Será que isso funciona sempre?

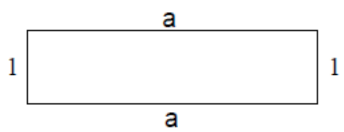
É isso mesmo.

7.1 Área do Retângulo

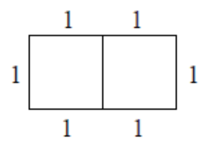
Será que a área de um retângulo é obtida simplesmente multiplicando-se as medidas de dois lados adjacentes?

Vamos mostrar que a área de um retângulo de lados adjacentes medindo, respectivamente, a e b é igual ao produto ab.

Comecemos por um caso bem simples. Suponhamos que um dos lados é unitário e o adjacente a ele mede a.

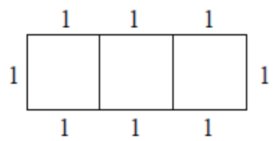


Indiquemos por S' a área desse retângulo. Por, exemplo, se $a = 2$, quanto vale S'?



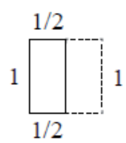
É evidente que são duas vezes. Logo, $S' = 2$.

E se $a = 3$, quanto vale S'?



Claramente, $S' = 3$.

Para $a = \frac{1}{2}$, quanto é S'?

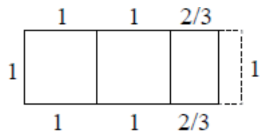


Quantas vezes o retângulo, nesse caso, contém o quadrado de lado unitário?

O retângulo contém a metade de um quadrado de lado unitário, isto é, ele contém esse quadrado meia vez. Portanto, $S' = \frac{1}{2}$

Concorda?

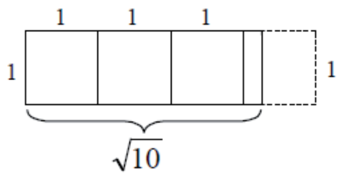
E para $a = \frac{8}{3}$, quanto vale S'?



O retângulo contém 2 vezes mais $\frac{2}{3}$ de uma vez o quadrado de lado unitário, ou seja, $\frac{8}{3}$ vezes esse quadrado. Por conseguinte, $S' = \frac{8}{3}$.

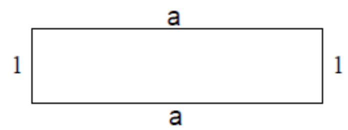
Certo?

Se $a = \sqrt{10}$, quanto é S'?



Você não acha razoável pensarmos que o retângulo, nesse caso, vai conter $\sqrt{10}$ vezes o quadrado de lado unitário? Espero que sim. Assim sendo, $S' = \sqrt{10}$.

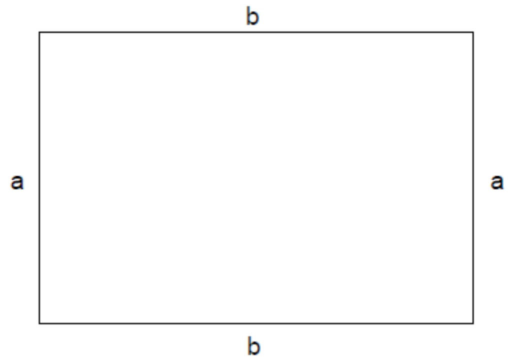
Enfim, para um número real positivo qualquer a, o retângulo contém, exatamente, a vezes o quadrado de lado unitário.



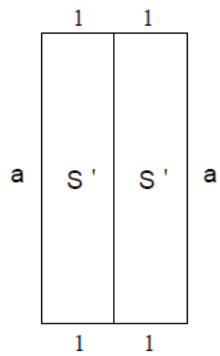
Passemos agora ao caso geral.

Logo, $S' = a$.

Chamemos de S a área do retângulo de lados adjacentes a e b.

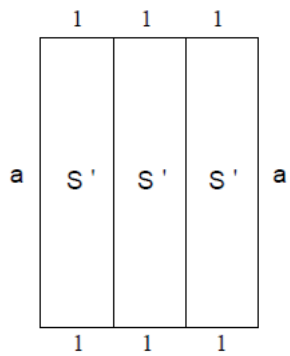


Considere, por exemplo, $b = 2$.



Vemos que o retângulo tem duas vezes a área do retângulo de lados consecutivos a e 1, isto é, $S = 2S'$.

E se $b = 3$, quantas vezes o retângulo tem a área S'?



Claramente, 3 vezes, ou seja, $3S'$.

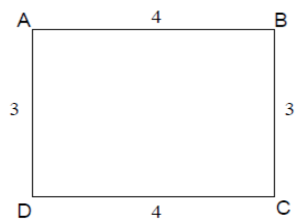
Para um b qualquer, empregando o mesmo raciocínio que utilizamos há pouco, parace-nos razoável admitir que o retângulo irá conter b vezes o retângulo de lados adjacentes a e 1. Por conseguinte sua área valerá bS', isto é, $S = bS'$. Posto que $S' = a$, segue-se que $S = b\,a$

Portanto, a área de um retângulo é o produto de dois lados adjacentes.

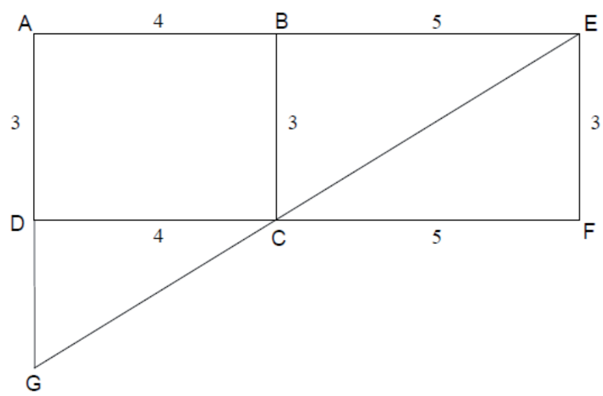
Euclides de Alexandria, por volta de 300 a.C. , escreveu uma obra fantástica intitulada ``Os elementos”. Naquela época, o Egito estava sob o domínio de Ptolomeu que criou um centro de ensino e pesquisa chamado Museu. Euclides trabalhava no Museu. Ele destacou-se por sua grande facilidade de ensinar e redigir textos.

``Os Elementos” estão divididos em treze volumes. Os seis primeiros tratam de geometria. Veja como Euclides, utilizando área, resolvia geometricamente uma equação de 1º grau, como, por exemplo, a equação $5x = 12$.

Primeiramente, ele construía um retângulo qualquer de área igual a 12. Podia ser um de lados adjacentes medindo 1 e 12, ou, 2 e 6, ou, 3 e 4, etc. Tomemos um retângulo *ABCD* de lados consecutivos 3 e 4, por exemplo.

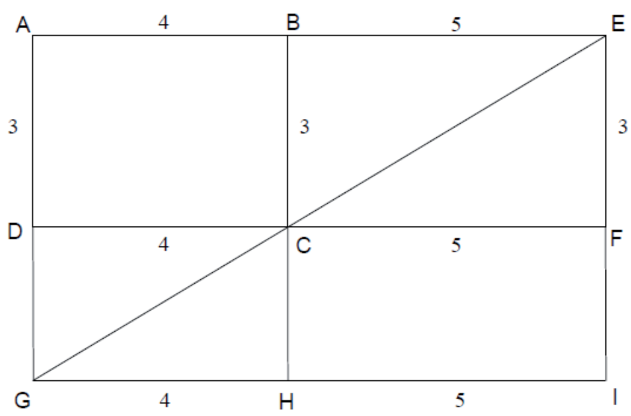


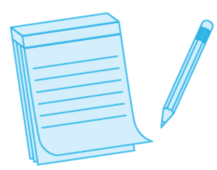
Em seguida, construía outro *BEFC* conjugado a *ABCD*, sendo *BE* = 5, como mostra a figura.



Depois, prolongava a diagonal $\overline{EC}$ do retângulo *BEFC* até encontrar o prolongamento de $\overline{AD}$ num ponto, digamos, *G*. A equação estava resolvida: *DG* era a solução.

Para justificar o método, tracemos mais alguns segmentos até formarmos a figura seguinte, em que *AEIG* é um retângulo:





ANOTE

Vamos justificar o método?

SAIBA MAIS

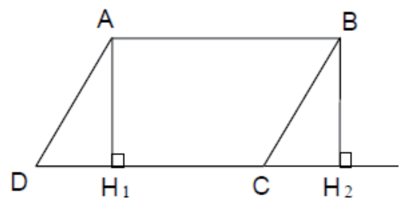
A partir da área do retângulo podemos deduzir a área de outros polígonos notáveis.

Os triângulos *BEC* e *FEC* são congruentes, portanto, têm mesma área. O mesmo ocorre com os seguintes pares de triângulos: *DCG* e *HCG*, e, *AEG* e *IEG*. Isso implica que os retângulos *ABCD* e *CFIH* têm a mesma área. Logo, 5(*CH*) = 12. Posto que *DG* = *CH*, segue-se que *DG* é a solução da equação $5x = 12$.

Adotaremos a notação $S_{A_1A_2\cdots A_n}$ para denotar a área de um polígono $A_1A_2\cdots A_n$.

7.2. Área do Paralelogramo

Seja *ABCD* um paralelogramo. Fixemos $\overline{DC}$ como base. Sejam H_1 e H_2, respectivamente, os pés das perpendiculares a $\overleftrightarrow{DC}$ passando por *A* e *B*.



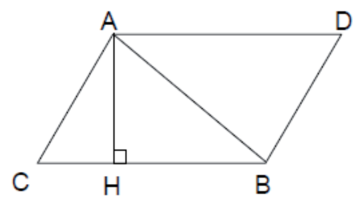
Desde que $AH_1D \equiv BH_2C$, vem que $S_{ABCD} = S_{ABH_2H_1}$. Desde que $S_{ABH_2H_1} = AB \cdot AH_1 = DC \cdot AH_1$, segue-se que $S_{ABCD} = DC \cdot AH_1$..

SAIBA MAIS

Portanto, a área de um paralelogramo é igual ao produto da base pela altura, assim como é a de um retângulo.

7.3. Área do Triângulo

Seja *ABC* um triângulo. Tomemos como base o lado $\overline{BC}$ e seja $\overline{AH}$ a altura relativa a essa base. Por *A* e *B*, respectivamente, consideremos as paralelas aos lados opostos. Seja *D* o ponto de encontro dessas paralelas.



É imediato que $ABC \equiv BAD$ e, portanto, $S_{ADBC} = 2 \cdot S_{ABC}$. Posto que $S_{ADBC} = CB \cdot AH$, decorre que

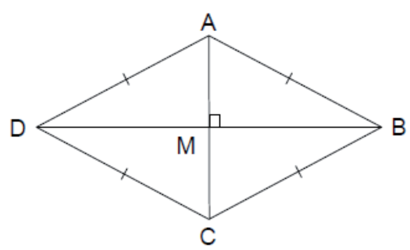
$$S_{ABC} = \frac{CB \cdot AH}{2}$$

SAIBA MAIS

Assim sendo, a área de um triângulo é igual ao produto da base pela altura, dividido por dois

7.4. Área do Losango

Seja *ABCD* um losango. As diagonais de um losango são perpendiculares e se cruzam ao meio.



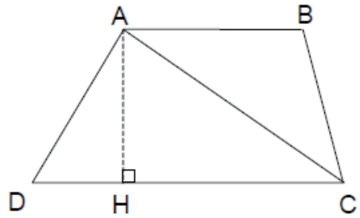
$$S_{ABCD} = 2S_{ABD} = 2 \cdot \frac{DB \cdot AM}{2} = DB \cdot AM = DB \cdot \frac{AC}{2} = \frac{DB \cdot AC}{2}$$

SAIBA MAIS

Assim, a área de um losango é igual ao produto das diagonais, dividido por dois.

7.5. Área do Trapézio

Seja $ABCD$ um trapézio, em que $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são as bases.



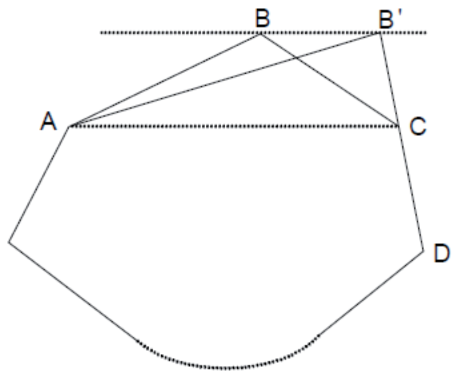
Note que os triângulos ABC e ACD têm alturas, respectivamente, relativas às bases $\overline{AB}$ e $\overline{DC}$, com mesma medida, a saber: a altura do trapézio. Assim sendo, temos:

$$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} = \frac{AB \cdot AH}{2} + \frac{DC \cdot AH}{2} = \left(\frac{AB + DC}{2}\right) \cdot AH$$

SAIBA MAIS

Por conseguinte, a área do trapézio é igual ao produto da base média pela altura

Para finalizar a unidade, apresentaremos um processo que reduz qualquer polígono convexo a um triângulo com mesma área. Com efeito, seja n o número de lados de um polígono. Se $n = 3$, nada temos a fazer. Suponhamos que $n > 3$. Sejam A, B, C e D vértices consecutivos do polígono. Por B, tracemos a paralela à diagonal $\overline{AC}$.



Prolonguemos $\overline{DC}$ até encontrar essa paralela num ponto, digamos, B'. Desde que os triângulos ABC e AB'C têm mesma base $\overline{AC}$ e mesma altura, segue-se que têm mesma área. Assim, a área do polígono ABCD de n lados é igual à área do polígono AB'D... de n – 1 lados. Se n – 1 = 3, então está demonstrado o que queremos. Se n – 1 > 3, reduzimos, pelo mesmo processo, o polígono *AB'D...* a um polígono de n – 2 lados e assim por diante.

SAIBA MAIS

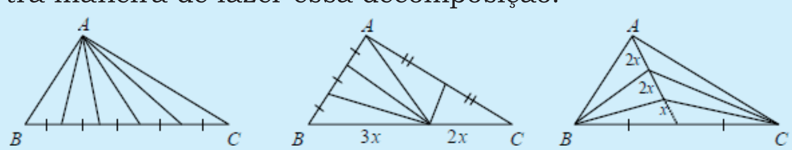
A um número finito de etapas, o polígono inicial ABCD... ficará reduzido a um triângulo de mesma área.

SÍNTESE DA UNIDADE

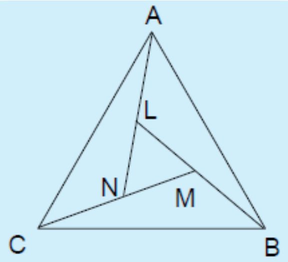
Inicialmente, demos o conceito de área de forma intuitiva. Em seguida, demonstramos que a área de um retângulo é o produto de dois lados adjacentes do mesmo. Esta é a base para o cálculo de área. Dela, decorrem as fórmulas para a área do triângulo e dos principais quadriláteros, conforme foi mostrado no texto. Apresentamos o método de Euclides para resolver equações do tipo $ax = b$ no universo dos números reais positivos. Por fim, mostramos um método, com o qual podemos reduzir qualquer polígono convexo a um triângulo com mesma área.

ATIVIDADES DE AVALIAÇÃO

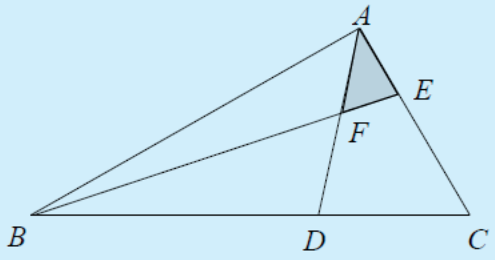
1. Calcule a área do retângulo cujos lados adjacentes medem, respectivamente, 6cm e 5cm.
2. Calcule a área do quadrado de lado 3m.
3. Calcule a área do paralelogramo de altura 6m e base 8m.
4. Calcule a área do losango cujas diagonais medem, respectivamente, 10cm e 6cm.
5. Calcule a área do triângulo cuja base mede 5cm e cuja altura vale 4cm.
6. Calcule a área do trapézio de altura 3cm e cujas bases medem, respectivamente, 8cm e 6cm.
7. Dê a área de um triângulo retângulo em função de seus catetos.
8. Se desejamos duplicar a área de um quadrado, de quanto devemos aumentar seu lado?
9. Se o lado de um quadrado é aumentado em 20%, em quanto aumentou sua área?
10. Calcule a área do triângulo equilátero cujo lado mede 6cm. (Sugestão: use o teorema de Pitágoras.)
11. Estabeleça a área do triângulo equilátero em função de seu lado.
12. Resolva geometricamente, utilizando o método de Euclides, a equação $3x = 16$. Generalize para a equação $ax = b$.
13. Por um ponto pertencente a uma diagonal de um paralelogramo, traçamos paralelas aos lados. Mostre que ficam determinados dois paralelogramos de mesma área.
14. Seja *O* o baricentro de um triângulo *ABC*. Demonstre que os triângulos *OAB*, *OAC* e *OBC* têm mesma área.
15. Demonstre que em cada uma das figuras abaixo, o triângulo *ABC* fica decomposto em cinco triângulos de mesma área. Encontre outra maneira de fazer essa decomposição.



16. Dados dois quadrados de mesmo lado, mostre que eles podem ser cortados em 4 pedaços de modo que esses pedaços podem ser rearrumados para formar um novo quadrado.
17. Na figura, *L*, *M* e *N* são, respectivamente, os pontos médios de $\overline{AN}$, $\overline{BL}$ e $\overline{CM}$. Demonstre que a área de *ABC* é igual a sete vezes a área de *LMN*.



18. Na figura, $AE = \frac{1}{3}AC$ e $CD = \frac{1}{3}BC$. Espresse a área de AEF em função da área de ABC.

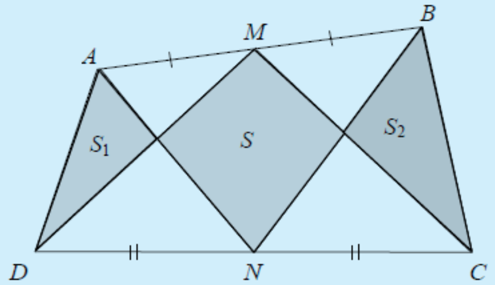


19. Mostre que toda reta passando pelo circuncentro de um retângulo o divide em partes com mesma área.

20. Demonstre que toda reta passando pelo centro de um octógono regular o divide em partes com mesma área.

21. Demonstre que toda reta passando pelo centro de um polígono regular de $2n$ lados o divide em partes com mesma área.

22. Na figura, $ABCD$ é um quadrilátero qualquer, M e N são, respectivamente, os pontos médios de $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, e, S, S_1 e S_2 são as áreas das regiões sombreadas. Prove que $S = S_1 + S_2$.



Unidade 8

Semelhança

Objetivos:

- Saber conceituar figuras semelhantes e, em particular, polígonos
- semelhantes.
- Compreender os casos de semelhança de triângulos e saber aplicá-los
- na resolução de problemas.
- Compreender que a razão entre as áreas de figuras semelhantes é o
- quadrado da razão de semelhança e saber aplicar esse resultado.
- Conhecer a fórmula que estabelece a área do disco e saber aplicá-la.
- Reconhecer retângulos áureos e saber dividir um segmento de reta em média e extrema razão.

8.1. Semelhança

O conceito de semelhança, em geometria, se assemelha um pouco com o conceito de congruência. Recordemos que duas figuras geométricas planas são congruentes quando é possível, através de um movimento rígido (isto é, sem deformar a figura) fazê-las coincidirem por superposição.

Tentaremos passar a idéia de semelhança utilizando uma situação do nosso cotidiano. Por exemplo, uma fotocópia ampliada ou reduzida de um documento é uma figura semelhante ao original. A razão entre a distância de dois pontos distintos no original e a distância dos pontos correspondentes na fotocópia é sempre a mesma para quaisquer que sejam os pontos. Em símbolos, isto quer dizer o seguinte: se A e B são dois pontos distintos pertencentes ao documento original e A' e B' são os pontos correspondentes, respectivamente, a A e B na fotocópia, então

A escala é nada mais nada menos do que o fator de semelhança.

$$\frac{AB}{A'B'} = R$$

para quaisquer A e B. Essa constante R chama-se *fator* ou *razão de semelhança*.

Enfim, as medidas correspondentes em figuras semelhantes são proporcionais.

Quando desenhamos uma planta de uma casa ou um mapa ou mesmo o retrato de uma pessoa, na verdade, tentamos fazer uma figura semelhante, reduzida, à figura real. Para conseguir isto, devemos guardar a mesma proporção nas medidas. Observe que todo mapa ou planta traz a escala, geralmente num canto do desenho.

Vamos iniciar nosso estudo de semelhança das figuras geométricas admitindo um resultado que pode ser demonstrado, porém, não o faremos aqui, que diz o seguinte:

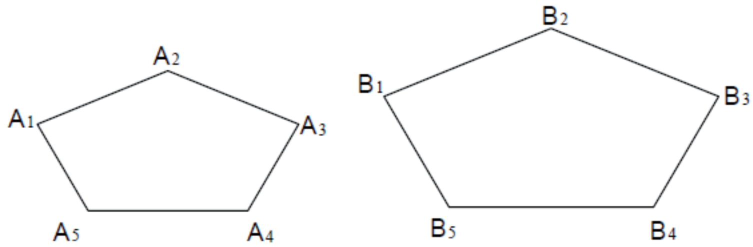
Dois polígonos de n lados só são semelhantes se for possível estabelecer uma correspondência entre seus vértices de tal sorte que ângulos internos correspondentes sejam congruentes e a razão entre lados correspondentes seja a mesma.

Por exemplo, dados os pentágonos $A_1A_2A_3A_4A_5$ e $B_1B_2B_3B_4B_5$, eles serão semelhantes se

$$\widehat{A_1} \equiv \widehat{B_1}, \widehat{A_2} \equiv \widehat{B_2}, \widehat{A_3} \equiv \widehat{B_3}, \widehat{A_4} \equiv \widehat{B_4} \text{ e } \widehat{A_5} \equiv \widehat{B_5}$$

e

$$\frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{A_2A_3}{B_2B_3} = \frac{A_3A_4}{B_3B_4} = \frac{A_4A_5}{B_4B_5} = \frac{A_5A_1}{B_5B_1} = R$$



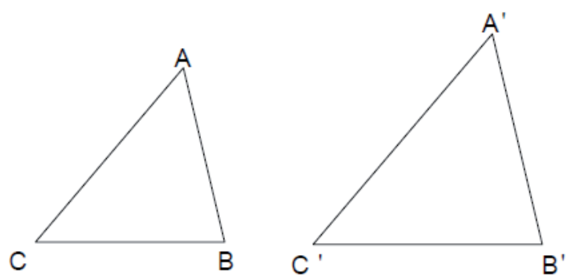
SAIBA MAIS

R é o fator de semelhança.

Adotaremos a notação $A_1A_2 \cdots A_n \sim B_1B_2 \cdots B_n$ para indicar que dois polígonos $A_1A_2 \cdots A_n$ e $B_1B_2 \cdots B_n$ são semelhantes em que *A1* corresponde a *B1*, *A2* corresponde a *B2*, e assim por diante.

Por exemplo, a notação *ABC ~ A'B'C'* significará que

$$\widehat{A} \equiv \widehat{A'}, \widehat{B} \equiv \widehat{B'} \text{ e } \widehat{C} \equiv \widehat{C'}, \text{ e, } \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$$



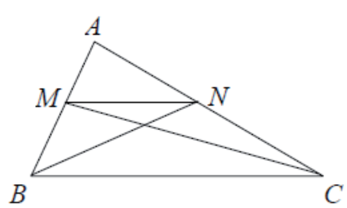
ANOTE

Este é o teorema fundamental da semelhança de triângulos, o qual será demonstrado usando-se área.

Teorema 55: Sejam ABC um triângulo e M e N pontos, respectivamente, entre A e B, e, A e C. Se $\overline{MN}$ é paralelo a $\overline{BC}$, então

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$$

Prova:



Desde que os triângulos *AMN* e *MBN* possuem mesma altura *h* em relação, respectivamente, às bases $\overline{AM}$ e $\overline{MB}$, vem que

$$\frac{S_{AMN}}{S_{MBN}} = \frac{1/2 \cdot h \cdot AM}{1/2 \cdot h \cdot MB} = \frac{AM}{MB}$$

Pela mesma razão, segue-se que

$$\frac{S_{AMN}}{S_{MCN}} = \frac{AN}{NC}$$

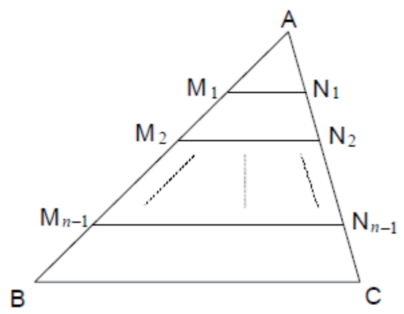
Entretanto, $S_{MBN} = S_{MCN}$, pois eles possuem a mesma base $\overline{MN}$ e mesma altura em relação a esta base, dado que $\overline{MN}//\overline{BC}$. Desse modo,

$$\frac{S_{AMN}}{S_{MBN}} = \frac{S_{AMN}}{S_{MCN}}, \text{ donde, } \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$$

Uma generalização do teorema anterior é conhecida por Teorema de Thales.

É o seguinte: se $M_1, M_2, ..., M_{n-1}$ são pontos entre A e B, e, $N_1, N_2, ..., N_{n-1}$ são pontos entre A e C, tais que $\overline{M_1N_1}$, $\overline{M_2N_2}$, ... , $\overline{M_{n-1}N_{n-1}}$ são paralelos à base $\overline{BC}$, então

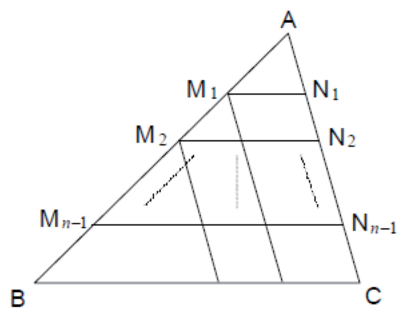
$$\frac{AM_1}{AN_1} = \frac{M_1M_2}{N_1N_2} = \cdots = \frac{M_{n-1}B}{N_{n-1}C}$$



DICA

Em outras palavras, isto quer dizer: um feixe de paralelas à base de um triângulo, determina nos outros dois lados segmentos proporcionais.

Para demonstrar este fato, basta traçarmos por $M_1, M_2, ..., M_{n-2}$ as respectivas paralelas ao lado $\overline{AC}$ e utilizarmos o teorema anterior seguidas vezes.

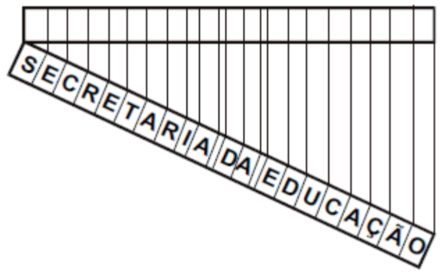


Omitiremos os detalhes da demonstração.

Deixamos esse trabalho a seu cargo.

Existe uma interessante aplicação do Teorema de Thales na confecção de letreiros. Suponha que você deseja escrever num certo espaço o seguinte letreiro: Secretaria da Educação. Seria complicado você calcular os espaçamentos que devem existir entre as letras, o tamanho delas, etc. a fim de que aquilo que você vai escrever caiba exatamente no local disponível. Isto se resolve facilmente utilizando-se o Teorema de Thales.

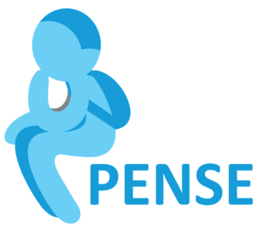
Veja como através da figura a seguir.



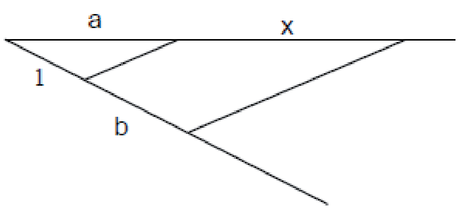
Pronto, agora só falta abrir o letreiro.

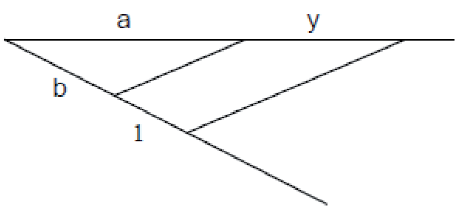
O letreiro oblíquo é um rascunho cujas dimensões são livres. O vértice superior do retângulo no qual está o rascunho é ligado com um segmento de reta ao vértice inferior direito do retângulo horizontal onde será desenhado o letreiro. As demais linhas são paralelas a esta. Desse modo, os espaçamentos esboçados no retângulo horizontal são proporcionais aos espaçamentos do rascunho. Em seguida, pode ser feito um ajuste na altura do retângulo horizontal para que os dois retângulos fiquem semelhantes.

Utilizando o Teorema de Thales, podemos também representar geometricamente o produto e o quociente de dois números positivos a e b, sendo dados os segmentos de reta com essas medidas.



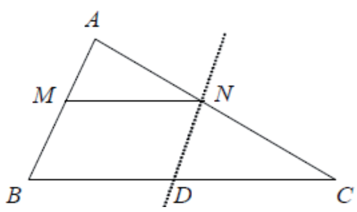
Descubra através das figuras como e por que.





Teorema 56: *Sejam ABC um triângulo e M e N pontos, respectivamente, entre A e B, e, A e C. Se* $\overline{MN}$ *é paralelo a* $\overline{BC}$, *então AMN ~ ABC.*

Prova: Devemos provar que $\widehat{M} \equiv \widehat{B}$, $\widehat{N} \equiv \widehat{C}$ e $\frac{AB}{AM} = \frac{BC}{MN} =$. Desde que $\overleftrightarrow{MN} // \overleftrightarrow{BC}$, vem que $\widehat{M} \equiv \widehat{B}$ e $\widehat{N} \equiv \widehat{C}$. Pelo teorema anterior, segue-se que $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$. Daí, $\frac{MB}{AM} = \frac{NC}{AN}$, donde, $\frac{AM+MB}{AM} = \frac{AN+NC}{AN}$, ou seja, $\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN}$. Resta provarmos que $\frac{AC}{AN} = \frac{BC}{MN}$. Com efeito, consideremos a paralela ao lado $\overline{AB}$ passando por N.

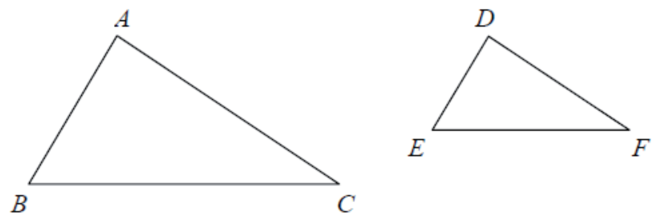


Seja D o ponto de interseção dessa paralela com o lado $\overline{BC}$. Assim, decorre do teorema anterior, que $\frac{CN}{NA} = \frac{CD}{DB}$, donde, $\frac{CN+NA}{NA} = \frac{CD+DB}{DB}$, isto é, $\frac{CA}{NA} = \frac{CB}{DB}$. Posto que $MNDB$ é um paralelogramo, segue-se que $DB = MN$ e, portanto, $\frac{AC}{AN} = \frac{BC}{MN}$.

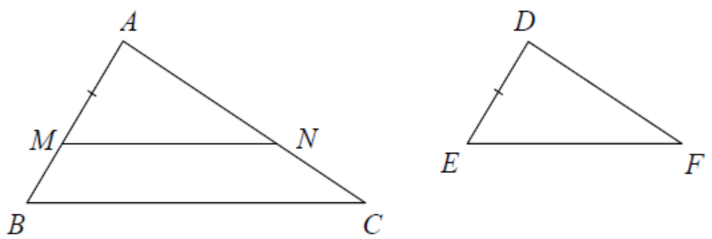
8.2. Casos de Semelhança

Teorema 57: *(Casos de semelhança de triângulos) Sejam ABC e DEF triângulos. Para que ABC ~DEF é suficiente que qualquer um dos quatro casos abaixo ocorra:*

i) (L. A. L.) $\widehat{A} \equiv \widehat{D}$ e $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$; ;
ii) (L. L. L.) $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$;
iii) (A. A.) $\widehat{A} \equiv \widehat{D}$ e $\widehat{B} \equiv \widehat{E}$;
iv) (L. P. (lados paralelos)) $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{DE}$, $\overleftrightarrow{BC} // \overleftrightarrow{EF}$ e $\overleftrightarrow{CA} // \overleftrightarrow{FD}$.



Prova i), ii) e iii). Se $AB = DE$, segue-se, nos casos i), ii) e iii), respectivamente, pelos casos L.A.L. , L.L.L. e A.L.A. de congruência de triângulos, que $ABC \equiv DEF$ e, portanto, $ABC \sim DEF$ com razão de semelhança igual a um. Suponhamos, então, que $AB \neq DE$. Digamos que $DE < AB$. Seja M o ponto entre A e B tal que $AM = DE$.



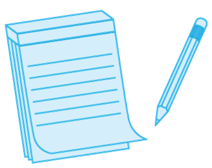
Seja N o ponto de interseção da paralela ao lado $\overline{BC}$ passando por M com o lado $\overline{AC}$. Pelo teorema anterior, decorre que $ABC \sim AMN$. Assim sendo, basta provarmos que $AMN \equiv DEF$.

i) Posto que $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$, $\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN}$ e $AM = DE$, segue-se que $DF = AN$. Desse modo, vem que $AMN \equiv DEF$ por L.A.L., uma vez que $AM = DE$, $\widehat{A} \equiv \widehat{D}$ e $AN = DF$.

ii) Desde que $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$, $\frac{AB}{AM} = \frac{BC}{MN} = \frac{CA}{NA}$ e $AM = DE$, decorre que $EF = MN$ e $FD = NA$. Por conseguinte, $AMN \equiv DEF$ (L. L. L.).

iii) Sendo $\widehat{M} \equiv \widehat{B}$ e $\widehat{B} \equiv \widehat{E}$, vem que $\widehat{M} \equiv \widehat{E}$. Dado que $\widehat{A} \equiv \widehat{D}$, $AM = DE$ e $\widehat{M} \equiv \widehat{E}$, segue-se que $AMN \equiv DEF$ (A. L. A.).

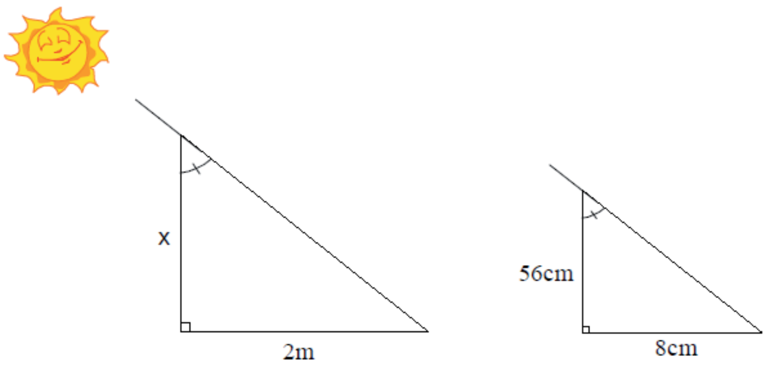
iv) Temos: $\widehat{A} \equiv \widehat{D}$ ou $\widehat{A}$ e $\widehat{D}$ são suplementares; $\widehat{B} \equiv \widehat{E}$ ou $\widehat{B}$ e $\widehat{E}$ são suplementares, e, $\widehat{C} \equiv \widehat{F}$ ou $\widehat{C}$ e $\widehat{F}$ são suplementares. Mostraremos que não podemos ter dois pares de ângulos suplementares dentre os pares $\widehat{A}$ e $\widehat{D}$, $\widehat{B}$ e $\widehat{E}$, e, $\widehat{C}$ e $\widehat{F}$. De fato, tomemos dois desses pares. Digamos, $\widehat{A}$ e $\widehat{D}$, e, $\widehat{B}$ e $\widehat{E}$. Vejamos o que ocorreria se eles fossem pares de ângulos suplementares. Temos que $|\widehat{A}| + |\widehat{B}| + |\widehat{C}| = 180°$ e $|\widehat{D}| + |\widehat{E}| + |\widehat{F}| = 180°$. Somando membro a membro estas igualdades, teríamos $|\widehat{A}| + |\widehat{B}| + |\widehat{C}| + |\widehat{D}| + |\widehat{E}| + |\widehat{F}| = 360°$ donde, usando o fato de que $|\widehat{A}| + |\widehat{D}| = 180° = |\widehat{B}| + |\widehat{E}|$, decorreria que $|\widehat{C}| + |\widehat{F}| = 0$, o que não é possível. Para evitar esta contradição, $\widehat{A}$ e $\widehat{D}$, e, $\widehat{B}$ e $\widehat{E}$ não podem ser simultaneamente pares de ângulos suplementares. Logo, dois dos três pares de ângulos citados acima são congruentes. O resultado segue-se pelo caso A. A.



ANOTE

Usando semelhança de triângulos, podemos medir a altura de um poste sem precisar fazê-lo diretamente

Vejamos como. Chamemos de x a altura do poste. O sol projeta uma sombra do poste. Suponhamos que essa sombra seja de 2 metros.



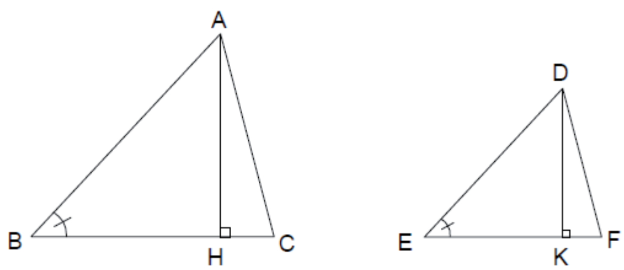
Tomemos uma pequena estaca e a enfiemos verticalmente no solo. Digamos que a parte exposta da estaca meça 56cm e sua sombra 8cm. Os raios solares nos chegam paralelos. Desse modo, os triângulos formados, respectivamente, pelo poste e sua sombra, e, pela estaca e sua sombra são semelhantes pelo caso A. A. Por conseguinte, teremos a seguinte proporção:

$$\frac{x}{56} = \frac{2}{8}$$

Resolvendo a equação, chegaremos a x = 14m.

8.3. Razão entre as áreas de figuras semelhantes

Consideremos inicialmente dois triângulos ABC e DEF tais que $ABC \sim DEF$ com razão de semelhança igual a R. Sejam H e K, respectivamente, os pés das alturas dos triângulos ABC e DEF relativos aos lados $\overline{BC}$ e $\overline{EF}$.



Dado que $\widehat{B} \equiv \widehat{E}$ e $\widehat{H} \equiv \widehat{K}$, segue-se, pelo caso A.A., que ABH ~ DEK, donde, $\frac{AH}{DK} = \frac{AB}{DE} = R$. Dessa maneira, temos:

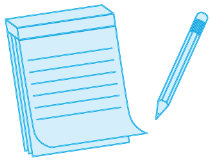
$$\frac{S_{ABC}}{S_{DEF}} = \frac{1/2 \cdot BC \cdot AH}{1/2 \cdot EF \cdot DK} = \frac{BC}{EF} \cdot \frac{AH}{DK} = R \cdot R = R^2$$

Será que este resultado se mantém para polígonos semelhantes quaisquer?

A resposta é positiva. Mais ainda, o resultado se mantém para figuras semelhantes quaisquer.

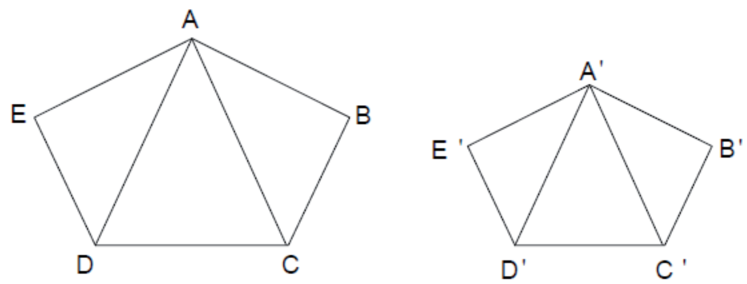
Iremos demonstrar este fato para pentágonos semelhantes. O caso geral, para polígonos semelhantes quaisquer, é provado de modo análogo.

Sejam $ABCDE$ e $A'B'C'D'E'$ pentágonos tais que $ABCDE \sim A'B'C'D'E'$ com fator de semelhança igual a R. Tracemos as diagonais de $ABCDE$ partindo do vértice A. Façamos o mesmo no pentágono $A'B'C'D'E'$ partindo de A'. Cada pentágono ficou decomposto em três triângulos.



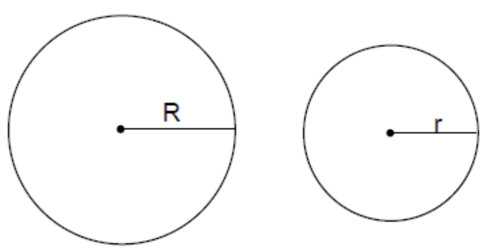
ANOTE

Conclusão: a razão entre as áreas de dois triângulos semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança.



Vamos mostrar que triângulos correspondentes são semelhantes com razão de semelhança igual a R. Por exemplo, $ABC \sim A'B'C'$ (L. A. L.) com razão R. Daí, vem que $\frac{AC}{A'C'} = R$ e $A\widehat{C}D \equiv A'\widehat{C'}D'$. Novamente, por L.A.L., segue-se que $ACD \sim A'C'D'$ com fator R. Dessa semelhança decorre que $\frac{AD}{A'D'} = R$ e $A\widehat{D}E \equiv A'\widehat{D'}E'$. Desse modo, mais uma vez, usando o caso L. A. L. de semelhança de triângulos, vem que $ADE \sim A'D'E'$ com o mesmo fator de semelhança. Por conseguinte, temos: $S_{ABC} = R^2 \cdot S_{A'B'C'}$, $S_{ACD} = R^2 \cdot S_{A'C'D'}$ e $S_{ADE} = R^2 \cdot S_{A'D'E'}$. Portanto, $S_{ABCDE} = S_{ABC} + S_{ACD} + S_{ADE} = R^2 \cdot S_{A'B'C'} + R^2 \cdot S_{A'C'D'} + R^2 \cdot S_{A'D'E'} = R^2 \cdot (S_{A'B'C'} + S_{A'C'D'} + S_{A'D'E'}) = R^2 \cdot S_{A'B'C'D'E'}$ como queríamos demonstrar.

8.4. Área do disco



PENSE

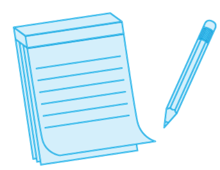
Você acha que os dois círculos são figuras semelhantes?

Se acha que sim, você está certo. De fato, dois discos de raios, respectivamente, iguais a R e r são figuras semelhantes com razão de semelhança igual a $\frac{R}{r}$. Logo, a razão de suas áreas é igual $\left(\frac{R}{r}\right)^2$.

Tomemos $r = 1$ e designemos por π a área do disco de raio unitário. Então, a área S do disco de raio R satisfaz à igualdade $\frac{S}{\pi} = \left(\frac{R}{1}\right)^2$ e daí segue-se que

$$S = \pi R^2$$

Na unidade sobre polígonos regulares, mostraremos um processo pelo qual podemos estimar o valor de π, isto é, o valor da área do círculo de raio unitário. Conforme veremos, $\pi \cong 3{,}1416$.



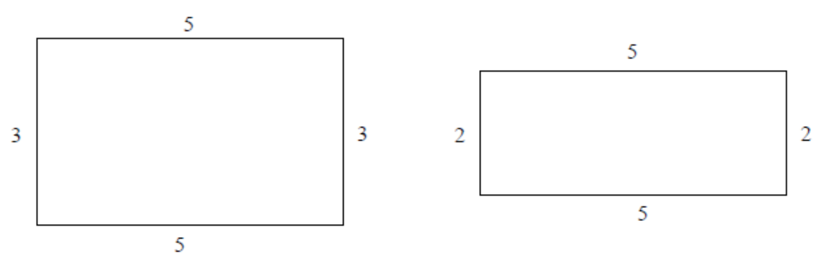
ANOTE

Portanto, se desejarmos calcular a área de um disco, aproximadamente, é só multiplicarmos por 3,1416 o quadrado de seu raio.

Nem sempre dois retângulos são semelhantes, você concorda?

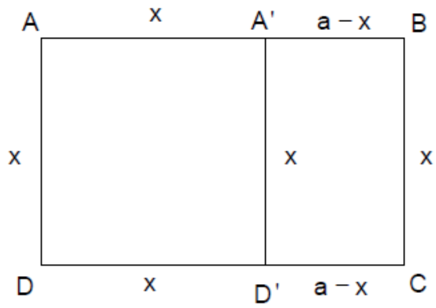
8.5. O retângulo de ouro

Por exemplo, os retângulos a seguir não são.



Descubra por que.

Seja $ABCD$ um retângulo em que $AD < AB$. Sejam A' um ponto situado entre A e B e D' um ponto entre D e C tais que $AA'D'D$ seja um quadrado. O retângulo $ABCD$ chama-se *áureo* se $BCD'A' \sim ABCD$.



Em outras palavras, um retângulo chama-se de *ouro* quando dele retiramos o quadrado, cujo lado é seu menor lado, o retângulo que resta é semelhante a ele.

Chamemos de x o lado do quadrado $AA'D'D$ e de a o maior lado do retângulo $ABCD$. Vamos descobrir a relação existente entre x e a. Da semelhança dos retângulos $BCD'A'$ e $ABCD$, vem que $\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{CD'}$, ou seja,

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a - x}$$

Daí, $x^2 + ax - a^2 = 0$. Resolvendo esta equação em x e observando que $x > 0$, teremos

$$x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \cdot a$$

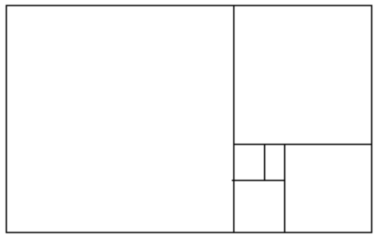
SAIBA MAIS

No retângulo de ouro o lado menor representa, aproximadamente, 61,8% do lado maior.

O número $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ é conhecido como o *número áureo* e vale aproximadamente 0,618.

Artistas e arquitetos utilizam o retângulo áureo em suas obras por considerarem seu formato esteticamente belo. Encontramos o retângulo áureo, por exemplo, no Partenon, o templo da deusa Atena, construído por volta de 500 a.C., uma das mais admiradas obras da arquitetura universal. Veja a imagem a seguir:

Agora, observe o seguinte: o retângulo restante, quando do retângulo áureo retiramos aquele quadrado, é também de ouro, uma vez que ele é semelhante ao retângulo *ABCD* inicial. Desse modo, podemos fazer o mesmo com o retângulo restante, ou seja, dele retirar o quadrado de lado igual ao seu lado menor e obter mais um retângulo áureo e assim indefinidamente.

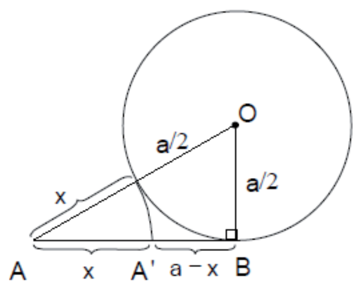


Outra coisa: o ponto *A'* entre *A* e *B*, com a propriedade de $\frac{AB}{AA'} = \frac{AA'}{A'B}$, isto é, $AA' = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot AB$ é chamado de *ponto de divisão áurea* do segmento ou *ponto de divisão em média e extrema razão* de $\overline{AB}$.

Enfim, um ponto entre *A* e *B* só é ponto de divisão áurea de $\overline{AB}$ se ele divide o segmento em duas partes: uma maior e a outra menor tais que o segmento inteiro está para a maior assim como esta está para a menor parte.

Para encerrar, daremos um procedimento para, com régua e compasso, acharmos um ponto de divisão em média e extrema razão de um dado segmento de reta.

Seja $\overline{AB}$ um segmento de reta. Chamemos de a sua medida. Por *B*, levante a perpendicular a $\overline{AB}$ até um ponto *O* de tal maneira que $OB = \frac{a}{2}$.



Com o centro do compasso em *O* e abertura $\frac{a}{2}$, trace o círculo, o qual será tangente a $\overline{AB}$ no ponto *B*. Em seguida, ligue *A* a *O* com um segmento de reta que interseccionará o círculo num ponto. Seja *x* a distância desse ponto a *A*. Transporte *x* para $\overline{AB}$ com o compasso centrado em *A*. O ponto *A'* entre *A* e *B* tal que *AA'* = *x* é um ponto de divisão áurea de $\overline{AB}$.

Para justificar essa construção, utilizaremos o teorema de Pitágoras que daremos na unidade subseqüente.

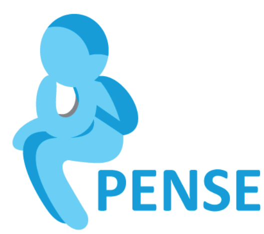
Afirma simplesmente que em todo triângulo retângulo o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos. Sendo o triângulo *OAB* retângulo, então vale o seguinte:

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

Dessa relação decorre que

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}$$

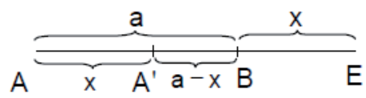
Portanto, *A'* é ponto de divisão áurea do segmento $\overline{AB}$.



E o que diz o teorema de Pitágoras?

Agora, tem uma coisa: a relação $\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}$ implica em $\frac{a+x}{a} = \frac{a}{x}$ e vice-versa (demonstre isto a título de exercício). Daí, podemos concluir que se prolongarmos $\overline{AB}$ até um ponto E de tal modo que $BE = x$, então B será ponto de divisão em média e extrema razão do segmento $\overline{AE}$, uma vez que $\frac{a+x}{a} = \frac{a}{x}$.

De acordo?

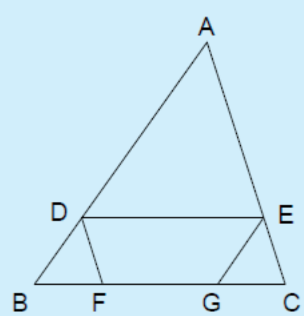


SÍNTESE DA UNIDADE

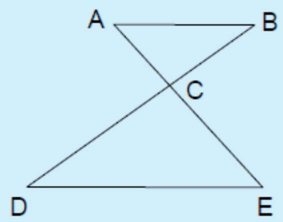
Conceituamos figuras planas semelhantes e, em particular, polígonos semelhantes. Enunciamos o teorema fundamental da semelhança de triângulos, do qual derivam os casos de semelhança de triângulos. Apresentamos o Teorema de Thales e os casos de semelhança de triaângulos. Demos um resultado segundo o qual a razão entre as áreas de polígonos semelhantes é o quadrado da razão de semelhança. Esse resultado mantém-se para figuras semelhantes quaisquer. Utilizando-se desse fato, demonstramos que a área de um disco de raio R é igual a πR^2, em que π foi definido como sendo a área do disco de raio unitário. Em seguida, discorremos sobre o retângulo de ouro e a divisão em média e extrema razão de um segmento de reta.

ATIVIDADES DE AVALIAÇÃO

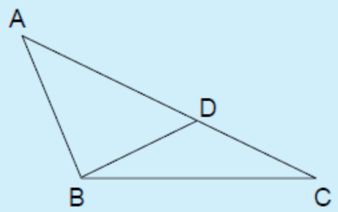
1. Na figura, temos: $\overline{DE}//\overline{BC}$, $\overline{DF}//\overline{AC}$, $\overline{EG}//\overline{AB}$, $BC = 16$ e $AB = 4(BD)$. Determine a medida de $\overline{FG}$..



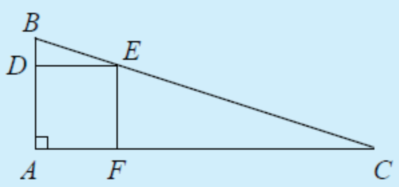
2. Na figura a seguir, $\overline{AB}//\overline{DE}$, $AB = 25$, $AC = 30$, $BC = 35$ e $DE = 40$. Determine CD e CE.



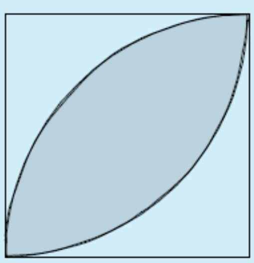
3. Na figura, $\hat{A} \equiv D\hat{B}C$, DC = 4 e BC = 6. Determine AD.



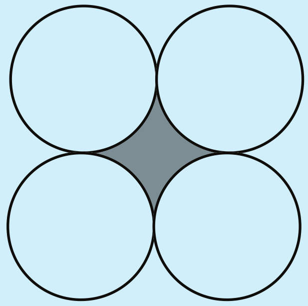
4. Num triângulo ABC, sejam D um ponto entre A e B e E um ponto entre A e C. Admitindo que $\overline{DE}$ é paralelo a $\overline{BC}$ e que $AD = 20$, $DB = 5$, $AC = 30$ e $BC = 45$, determine o perímetro do trapézio BDEC.
5. Num trapézio $ABCD$ em que $\overline{AB}//\overline{CD}$, sejam M e N pontos, respectivamente, entre A e D, e, B e C. Supondo que $\overline{MN}$ é paralelo às bases, $AB = 22$, $CD = 13$ e $MD = 3AM$, determine a medida de $\overline{MN}$.
6. Na figura, o triângulo ABC é retângulo em A, $ADEF$ é um quadrado, $AP = 2$ e $AC = 6$. Calcule o lado do quadrado.



7. Sejam ABC um triângulo, D, E e F, respectivamente, pontos entre A e B, B e C, e, A e C. Suponha que AFED é um losango de lado l, AC = 6 e AB = 12. Calcule l.
8. Mostre que são semelhantes dois triângulos isósceles cujos ângulos formados pelos lados iguais são congruentes.
9. Quanto seria necessário de papel para cobrir toda a face externa de uma lata cilíndrica cuja altura é 15cm e cujo raio da base é 5cm?
10. Em função do lado a do quadrado a seguir, calcule a área da região sombreada.



11. Quatro circunferências de raio unitário, cujos centros são vértices de um quadrado, são tangentes exteriormente duas a duas, como mostra a figura a seguir. Calcule a área da parte sombreada.

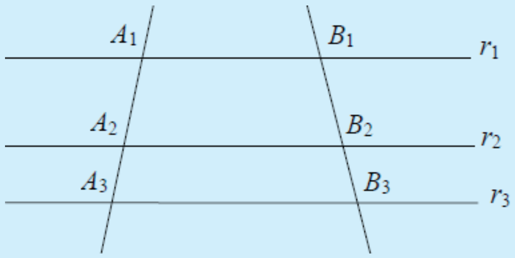


12. Um trapézio tem bases medindo 4cm e 8cm e altura 9cm. Pelo ponto de encontro de suas diagonais traçamos uma paralela às bases, formando assim dois trapézios. Determine as alturas desses trapézios.

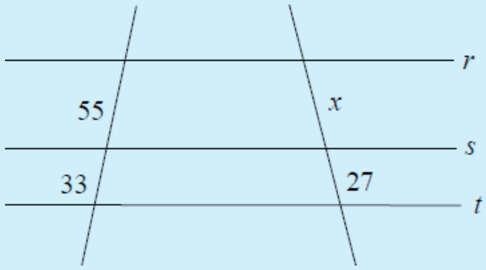
13. Sejam a e b as bases de um trapézio e seja P o ponto de encontro das diagonais desse trapézio. Mostre que a medida do segmento contido na reta paralela às bases passando por P, limitado pelos lados transversos, é igual a

$$\frac{2ab}{a+b}$$

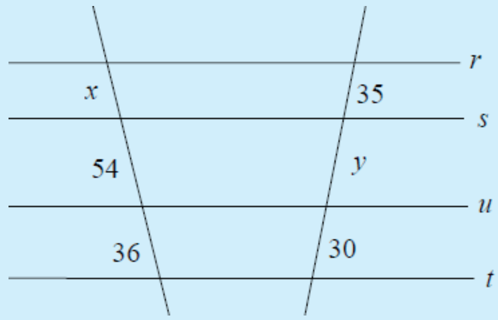
14. Na figura, r_1, r_2 e r_3 são paralelas entre si. Demonstre que $\frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{A_2A_3}{B_2B_3}$.. Generalize.



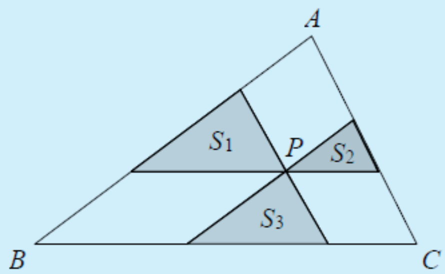
15. Na figura, determine o valor de x, sendo r, s e t paralelas entre si.



16. Na figura, determine os valores de x e y, sendo r, s, t e u paralelas entre si.



17. Seja P um ponto no interior de um triângulo ABC. Por P traçamos paralelas aos lados de ABC como mostra a figura, formando três triângulos de áreas S_1, S_2 e S_3. Seja S a área de ABC. Prove que $\sqrt{S} = \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}$. .



18. Sejam ABC um triângulo, L, M e N, respectivamente, pontos situados entre B e C, A e C, e, A e B. Demonstre que se $\overline{ML}//\overline{AB}$ e $\overline{LN}//\overline{AC}$ então

$$\frac{AM}{AC} + \frac{AN}{AB} = 1$$

19. O cateto $\overline{AB}$ de um triângulo ABC, retângulo em A, é dividido em seis partes iguais. Cinco linhas paralelas ao cateto $\overline{AC}$ são traçadas até $\overline{BC}$ pelos pontos de divisão. Se $AC = 10$, quanto vale a soma das medidas dos cinco segmentos?

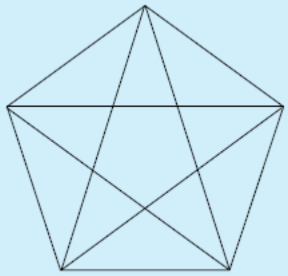
20. Generalize o exercício anterior pondo n em vez de 6 e $AC = a$.

21. Suponhamos que $ABC \sim A'B'C'$ de razão R. Se a, m e b são, respectivamente, a altura, a mediana e a bissetriz de ABC relativas ao lado $\overline{BC}$ e se a' , m' e b' são, respectivamente, a altura, a mediana e a bissetriz relativas ao lado $\overline{B'C'}$, prove que

$$\frac{a}{a'} = \frac{m}{m'} = \frac{b}{b'} = R$$

22. Sejam A_1 um ponto situado entre A e B, $a = AB$ e $x = AA'_1$. Suponha que $\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}$, , isto é, A_1 é ponto de divisão áurea de $\overline{AB}$. Seja A_2 entre A e A_1 tal que $AA_2 = a - x$. Mostre que A_2 é ponto de divisão áurea de $\overline{AA_1}$ e também de $\overline{AB}$.

23. Chama-se *pentagrama* a figura formada pelas diagonais de um pentágono regular. O pentagrama tem a forma de uma estrela de 5 pontas como se vê a seguir. Demonstre que os pontos de interseção dessas diagonais as dividem em média e extrema razão.



24. Demonstre que a distância do circuncentro de um triângulo a qualquer um dos lados é igual à metade da distância do ortocentro ao vértice oposto.

Unidade 9

Relações Métricas

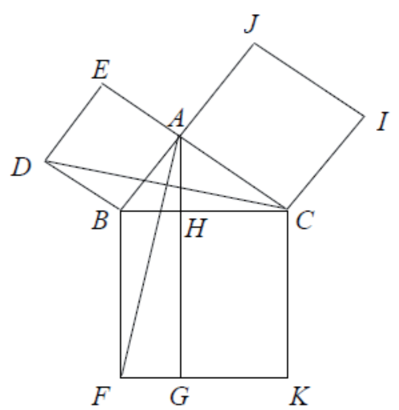
Objetivos:

- Saber utilizar as relações métricas dos triângulos retângulos na resolução
- de problemas, notadamente, a relação pitagórica.
- Saber conceituar as funções trigonométricas num triângulo retângulo
- e saber calcular os valores dessas funções nos ângulos que
- medem 30, 45, 60, 120, 135 e 150.
- Conhecer relaçõesmétricas emtriângulos quaisquer tais como aquela
- estabelecida pelo Teorema da Bissetriz Interna, Potência de um Ponto, Lei dos Cossenos
e Lei dos Senos. Saber aplicar tais relações na resolução de problemas.

9.1. Teorema de Pitágoras

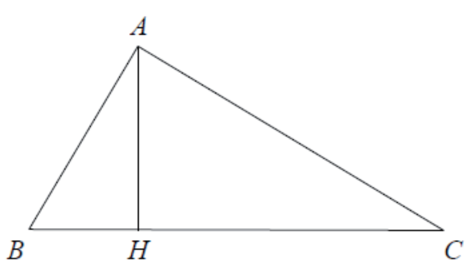
Uma das relações métricas em triângulos mais importantes está descrita no famoso Teorema de Pitágoras. Pitágoras viveu em Samos na Grécia. Nasceu em 580 a.C. e morreu em 500. A ele atribui-se a autoria da demonstração desse teorema, que afirma: ``em todo triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos". Devido à perda de documentos daquela época e pelo fato de que a escola fundada por ele era secreta, o Teorema de Pitágoras assim como o da divisão áurea de um segmento, podem ter sido demonstrados por seus discípulos ou até mesmo pelos babilônios.

Foi usando área que Euclides demonstrou o Teorema de Pitágoras (proposição 47 do livro I de ``Os elementos"). Reproduziremos a prova de Euclides que era feita utilizando a figura abaixo, às vezes chamada ``moinho de vento".



Com efeito, a área do quadrado *ABDE* é igual a duas vezes a área do triângulo *BCD* que por sua vez é igual à área de *ABF* que é a metade da área do retângulo *BFGH*, donde, a área do quadrado *ABDE* é igual à área do retângulo *BFGH*. De modo análogo, conclui-se que a área do quadrado *ACIJ* é igual a do retângulo *CKGH*. Logo, a área do quadrado *BCKF* é igual à soma das áreas dos quadrados *ABDE* e *ACIJ*, isto é, $BC_2 = AB_2 + AC_2$.

Foi utilizando o seguinte resultado que Polya demonstrou o Teorema de Pitágoras: a razão entre as áreas de dois triângulos semelhantes é o quadrado do fator de semelhança. Passemos então à prova de Polya.



SAIBA MAIS

Um professor de matemática em Cleveland, Ohio (Estados Unidos), chamado Elisha Scott Loomis publicou, em 1927, um livro intitulado "The Pythagorean Proposition". Nesse livro há 230 demonstrações do famoso teorema. Em 1940, na segunda edição, ele acrescentou mais demonstrações chegando a um total de 370.

DICA

Talvez a mais interessante das demonstrações do teorema de Pitágoras e não se encontra no livro do professor Loomis é uma devida ao matemático húngaro George Polya. Ela está no livro de sua autoria "Induction and Analogy in Mathematics".

ANOTE

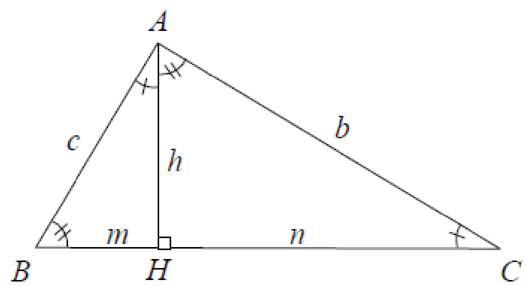
Há outras relações que podemos extrair de um triângulo retângulo.

Os triângulos HBA e ABC são semelhantes com fator $\frac{AB}{BC}$ ao passo que HCA e ACB são semelhantes com razão $\frac{AC}{BC}$. Portanto, $\frac{S_{HBA}}{S_{ABC}} = \frac{AB^2}{BC^2}$ e $\frac{S_{HCA}}{S_{ABC}} = \frac{AC^2}{BC^2}$.

Posto que $S_{ABC} = S_{HBA} + S_{HCA}$, decorre que $1 = \frac{S_{HBA}}{S_{ABC}} + \frac{S_{HCA}}{S_{ABC}}$, donde, $1 = \frac{AB^2}{BC^2} + \frac{AC^2}{BC^2}$ e daí $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

É o que veremos a seguir.

Sejam ABC um triângulo retângulo em A, $\overline{AH}$ a altura relativa à hipotenusa, $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, $h = AH$, $m = BH$ e $n = HC$.



Temos: $ABC \sim HBA \sim HAC$ (caso A. A.). De $HBA \sim HAC$, $ABC \sim HAC$ e $ABC \sim HBA$, seguem-se, respectivamente, que $\frac{h}{n} = \frac{m}{h}$, $\frac{b}{n} = \frac{a}{b}$ e $\frac{c}{m} = \frac{a}{c}$, donde,

$$h^2 = mn,\ b^2 = an \text{ e } c^2 = am$$

SAIBA MAIS

Essa é considerada a demonstração mais curta do teorema de Pitágoras e também a mais conhecida.

Chamando m e n, respectivamente, de projeções dos catetos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ sobre a hipotenusa, podemos enunciar os resultados acima da seguinte maneira:

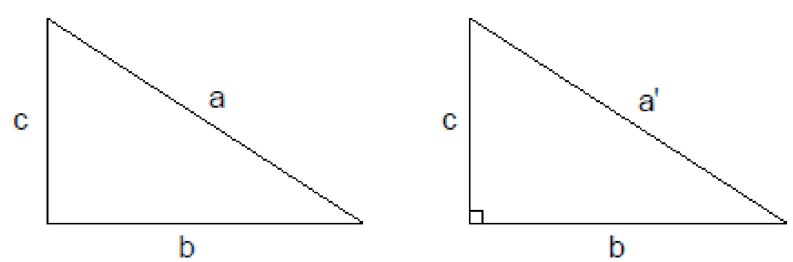
"Num triângulo retângulo, a altura relativa à hipotenusa é a média geométrica entre as projeções dos catetos sobre ela e cada cateto é a média geométrica entre a hipotenusa e sua projeção sobre ela."

Das relações $b^2 = an$ e $c^2 = am$, segue-se o Teorema de Pitágoras. Com efeito, somando estas igualdades membro a membro, obtemos: $b^2 + c^2 = an + am = a(n + m) = a^2$.

Vale ressaltarmos que a recíproca do Teorema de Pitágoras é verdadeira, ou seja, se os lados a, b e c de um triângulo satisfazem à relação $a^2 = b^2 + c^2$, então o triângulo é retângulo. Com efeito, supondo que $a^2 = b^2 + c^2$, vamos mostrar que o ângulo que se opõe ao lado de medida a é reto.

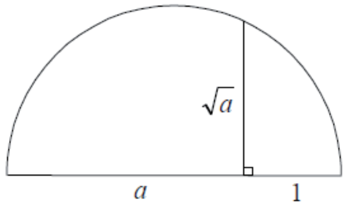
PENSE

Observe a figura, descubra e justifique a construção.



De fato, consideremos um triângulo retângulo cujos catetos sejam b e c. Assim sendo, sua hipotenusa a' satisfaz, de acordo com o Teorema de Pitágoras, à relação $(a')^2 = b^2 + c^2$. Desse modo, $a^2 = (a')^2$ e daí $a = a'$. Logo, os triângulos são congruentes pelo caso L. L. L. e portanto o ângulo oposto ao lado a é reto.

Dado um segmento de medida a, vamos agora mostrar como se constrói, usando régua e compasso, um segmento de reta medindo $\sqrt{a}$.

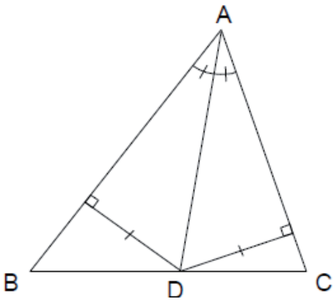


9.2. Teorema da bissetriz interna

Teorema 58: (da bissetriz interna) Sejam ABC um triângulo e $\overline{AD}$ a bissetriz relativa ao lado BC. Então,

$$\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CD}$$

Prova: Considere os triângulos *ABD* e *ACD*.



Tomando $\overline{BD}$ e $\overline{DC}$, respectivamente, como bases de *ABD* e *ACD*, eles possuem a mesma altura. Logo, $\frac{S_{ABD}}{S_{ADC}} = \frac{BD}{CD}$. Agora, tomando $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ como respectivas bases de *ABD* e *ACD*, eles também têm mesma altura, uma vez que o ponto *D* é equidistante dos lados do ângulo *BÂC*, já que *D* pertence à bissetriz do mesmo. Por conseguinte, $\frac{S_{ABD}}{S_{ADC}} = \frac{AB}{AC}$. Comparando esta igualdade com a que obtivemos no início dessa demonstração, segue-se que $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$, ou seja, $\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CD}$.

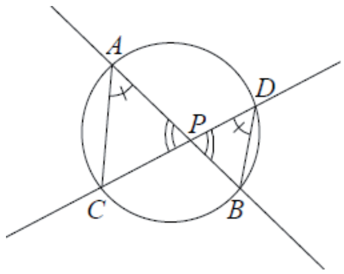
9.3. Potência de um ponto

Teorema 59: *Sejam α e P, respectivamente, uma circunferência e um ponto no plano. Seja r uma reta passando por P e secante a α nos pontos A e B. Então, o produto d(P,A) · d(P,B) é constante para qualquer que seja r.*

Prova: Distinguiremos três casos.

Caso 1. $P \in \alpha$. Temos que $P = A$ ou $P = B$, donde, $d(P,A) \cdot d(P,B) = 0$.

Caso 2. $P \in \text{int}\alpha$. Seja $s \neq r$ passando por *P* e secante a α nos pontos *C* e *D*. Devemos mostrar que $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.

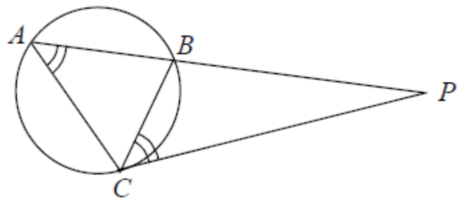


ANOTE

Este produto é independente de *r*.

Com efeito, os ângulos $\widehat{A}$ e $\widehat{D}$ são congruentes, pois subtendem o mesmo arco $\widehat{BC}$. Desse modo, $CAP \sim BDP$ (caso A. A.). Daí, $\frac{PA}{PD} = \frac{PC}{PB}$, isto é, $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.

Caso 3. $P \in \text{ext}\,\alpha$. Seja $C \in \alpha$ tal que $\overleftrightarrow{PC}$ é tangente a α. Mostraremos que $PA \cdot PB = PC^2$. Uma conseqüência disto é que $d(P,A) \cdot d(P,B)$ será constante e o teorema estará demonstrado. Sendo $P \in \text{ext}\,\alpha$, então B está situado entre A e P ou A está entre B e P.



SAIBA MAIS

O primeiro trabalho de relevância sobre trigonometria está contido no livro intitulado "Almajesto" de autoria de Ptolomeu (viveu no segundo século).

Digamos que B se localiza entre A e P. Assim sendo, o ângulo semi-inscrito $B\widehat{C}P$ e o inscrito $B\widehat{A}C$ subtendem o mesmo arco $\widehat{BC}$. Logo, $B\widehat{C}P \equiv B\widehat{A}C$. Por conseguinte, $ACP \sim CBP$ (caso A. A.), donde, $\frac{PA}{PC} = \frac{PC}{PB}$, isto é, $PA \cdot PB = PC^2$.

Definição 60: *Usando as notações do enunciado desse teorema, o produto $d(P,A) \cdot d(P,B)$ é chamado de potência do ponto P em relação a α e o denotamos por $pot(P)_\alpha$ ou simplesmente $potP$ se não houver dúvidas quanto a α.*

Conforme a demonstração no caso 3, temos que $potP = PC^2$ se P pertence a $\text{ext}\,\alpha$ e $\overleftrightarrow{PC}$ é tangente a α em C.

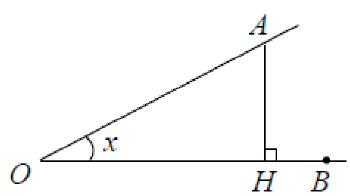
9.4. Trigonometria

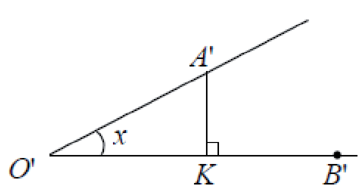
Há mais de dois mil anos, a trigonometria era o estudo apenas das relações existentes entre os lados de um triângulo. Na época não havia o conceito de medida de ângulos. Depois, com o surgimento deste, a trigonometria passou a estudar as relações entre arcos de círculos e os comprimentos das cordas que os subtendem. Essas relações eram os fundamentos para o cálculo de distâncias. Eudoxo (408 355 a.C.) certamente usou trigonometria para calcular o tamanho da terra e as distâncias relativas do Sol e da Lua. A trigonometria de então não empregava a linguagem das funções trigonométricas seno e cosseno que hoje utilizamos. Euclides, por exemplo, em seu livro II de ``Os Elementos" demonstrou a lei dos cossenos, que veremos daqui há pouco, usando uma linguagem puramente geométrica.

ATENÇÃO

Iremos agora definir sen x e cos x, sendo x a medida de um ângulo agudo e não nulo.

Consideremos dois ângulos agudos não nulos $A\widehat{O}B$ e $A'\widehat{O'}B'$ congruentes e de medidas iguais a x.





Sejam H o pé da perpendicular a $\overrightarrow{OB}$ passando por A e K o pé da perpendicular a $\overrightarrow{OB}$ passando por A'. Pelo caso A.A. , decorre que $AOH \sim A'O'K'$. Daí, vem que $\frac{AH}{AO} = \frac{A'K}{A'O'}$ e $\frac{OH}{AO} = \frac{O'K}{A'O'}$. Isto significa que os quocientes $\frac{AH}{AO}$ e $\frac{OH}{AO}$, que são, respectivamente, o cateto oposto ao ângulo x dividido pela hipotenusa e o cateto adjacente ao ângulo x dividido pela hipotenusa, não dependem do triângulo retângulo que considerarmos. Esses quocientes dependem tão somente de x. Eles são, respectivamente, chamados de *seno de x* e *cosseno de x*, e, são denotados por *sen x* e *cos x*. Assim, temos:

$$\operatorname{sen} x = \frac{AH}{AO} \text{ e } \cos x = \frac{OH}{AO}$$

Note que, sendo a hipotenusa o maior lado de um triângulo retângulo, $\frac{AH}{AO} < 1$ e $\frac{OH}{AO} < 1$, daí, $0 < \operatorname{sen} x < 1$ e $0 < \cos x < 1$ para $0^\circ < x < 90^\circ$.

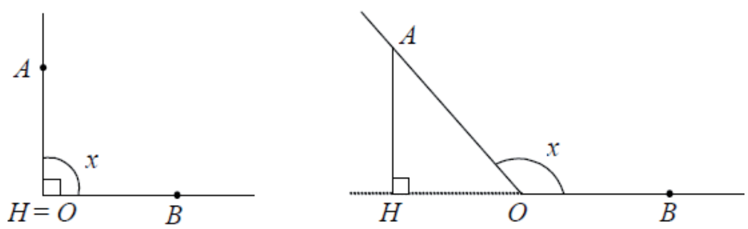
A partir do Teorema de Pitágoras obtemos a relação

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

conhecida por *relação fundamental da trigonometria*. Senão vejamos.

$$AO^2 = AH^2 + OH^2 \Rightarrow 1 = \frac{AH^2}{AO^2} + \frac{OH^2}{AO^2} \Rightarrow \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

Seja $A\hat{O}B$ um ângulo não agudo e não raso de medida x. Seja H o pé da perpendicular a $\overleftrightarrow{OB}$ passando por A.



Temos que $H = O$ se $A\hat{O}B$ é reto, e, $H \neq O$ e pertence à semi-reta oposta a $\overrightarrow{OB}$ se $A\hat{O}B$ é obtuso. Assim sendo, nos parece natural definir sen 90º = 1 e cos 90º = 0, pois, nesse caso, $AH = AO$ e $d(H,O) = 0$. No caso de $x > 90^\circ$, definimos:

$$\begin{cases} \operatorname{sen} x = \frac{AH}{AO} = \operatorname{sen}(180^\circ - x) \\ \cos x = -\frac{OH}{AO} = -\cos(180^\circ - x) \end{cases}$$

A relação fundamental continua válida para $90^\circ \leq x < 180^\circ$. Veja porque.

$\operatorname{sen}^2 90^\circ + \cos^2 90^\circ = 1^2 + 0^2 = 1$ e $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = \operatorname{sen}^2(180^\circ - x) + [-\cos(180^\circ - x)]^2 = \operatorname{sen}^2(180^\circ - x) + \cos^2(180^\circ - x) = 1$ para $90^\circ < x < 180^\circ$.

Também vale a seguinte relação:

$$\operatorname{sen} x = \cos y \text{ se } x + y = 90^\circ$$

Vamos agora calcular os valores de sen x e cos x para certos valores de x. Precisamente para x = 30º, 45º, 60º, 120º, 135º e 150º. Comecemos calculando cos 30º, cos 45º e cos 60º.

Da relação fundamental, temos $\operatorname{sen}^2 45^\circ + \cos^2 45^\circ = 1$ e como sen 45º = cos 45º, segue-se que $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Tomemos agora um triângulo retângulo cujos ângulos agudos medem 30º e 60º.

ATENÇÃO

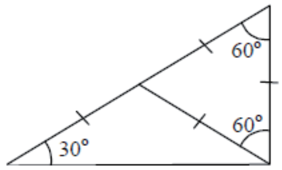
Iremos agora definir sen x e cos x, sendo x a medida de um ângulo não agudo e não raso.

ATENÇÃO

Atente para o sinal negativo na definição do cosseno. Ele se deve ao fato de H pertencer à semi-reta oposta a $\overleftrightarrow{OB}$

PENSE

Isto quer dizer que se dois ângulos são complementares então o seno de um é igual ao cosseno do outro. Descubra por que.



Desde que a mediana relativa à hipotenusa vale a metade da mesma, segue-se que o cateto adjacente ao ângulo de 60º também vale a metade da hipotenusa. Desse modo, $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$. Posto que $\text{sen}^2\, 60^\circ + \cos^2 60^\circ = 1$ e sen 60º = cos 30º, vem que $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Enfim, temos:

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ e } \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

A partir daí e das propriedades já estabelecidas decorrem, imediatamente, que $\text{sen } 30^\circ = \text{sen } 150^\circ = \frac{1}{2}$, $\text{sen } 45^\circ = \text{sen } 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\text{sen } 60^\circ = \text{sen } 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$, $\cos 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Existem ainda outras funções trigonométricas. Ei-las: *tangente* (tg), *cotangente* (cotg), *secante* (sec) e *cossecante* (cossec). Elas são definidas a partir do seno e do cosseno, assim:

$$\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x}\ (x \neq 90^\circ);$$

$$\text{cotg } x = \frac{\cos x}{\text{sen } x};$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}\ (x \neq 90^\circ);$$

$$\text{cossec } x = \frac{1}{\text{sen } x}.$$

DICA

Vale ressaltar que as máquinas calculadoras científicas trazem as funções trigonométricas seno e cosseno. Se você tiver acesso a uma dessas máquinas, confira nela os valores que estamos deduzindo e aproveite para calcular o seno e o cosseno de outros ângulos.

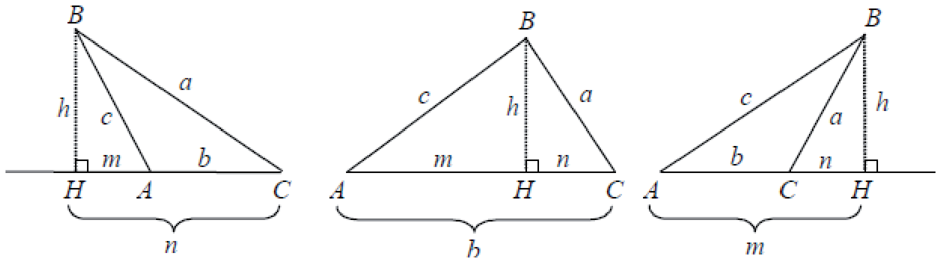
9.5. Lei dos cossenos

Teorema 61: *(Lei dos Cossenos) Em todo triângulo, o quadrado de um lado é igual a soma dos quadrados dos outros dois lados menos duas vezes o produto deles vezes ainda o cosseno do ângulo oposto ao lado.*

Prova: Sejam ABC um triângulo, $a = BC$, $b = AC$ e $c = AB$. Tomemos um lado, digamos, o lado a. Devemos mostrar que $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos |\hat{A}|$. Sejam $h = BH$ a altura relativa ao lado $\overline{AC}$, $m = d(A,H)$ e $n = d(H,C)$.

SAIBA MAIS

A lei dos cossenos é uma generalização do Teorema de Pitágoras. Curioso é que usaremos tal teorema para demonstrá-la.



Pelo Teorema de Pitágoras, temos:

$$\begin{cases} a^2 = h^2 + n^2 & \text{(I)} \\ h^2 = c^2 - m^2 & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (II) em (I), vem que $a^2 = c^2 - m^2 + n^2$. Desde que $n = b + m$ se $\hat{A}$ é obtuso e $n = b - m$ ou $n = m - b$ se $\hat{A}$ não é obtuso, segue-se que $a^2 = c^2 - m^2 + (b \pm m)^2$, donde, $a^2 = b^2 + c^2 \pm 2bm$. Posto que $\cos|\widehat{A}| = \mp\frac{m}{c}$ conforme $\hat{A}$ seja, respectivamente, obtuso ou não, decorre que $m = \mp c \cdot \cos|\widehat{A}|$ e, portanto, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos|\hat{A}|$.

Por exemplo, se um ângulo de um triângulo mede 60º e os lados que formam esse ângulo medem, respectivamente, 8 e 5, então o terceiro lado é a raiz quadrada de $8^2 + 5^2 - 2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot \cos 60^o$, ou seja, 7.

SAIBA MAIS

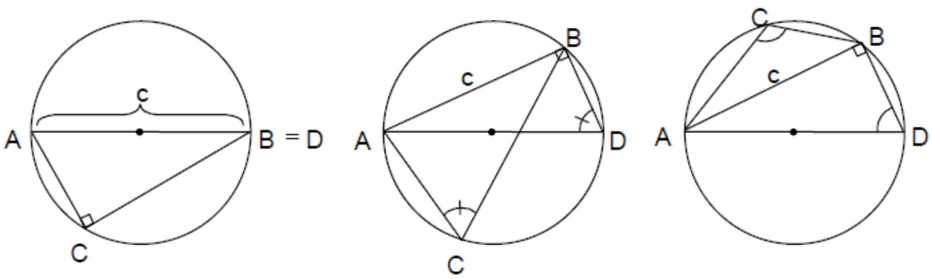
Usando a lei dos cossenos, podemos determinar um lado de um triângulo se forem dados o ângulo oposto e os outros dois lados.

9.6. Lei dos senos

Teorema 62: *(Lei dos Senos) Sejam a, b e c os lados de um triângulo, respectivamente, opostos aos ângulos $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$, e, R o raio da circunferência circunscrita a ele. Então,*

$$\frac{a}{sen\,|\widehat{A}|} = \frac{b}{sen\,|\widehat{B}|} = \frac{c}{sen\,|\widehat{C}|} = 2R$$

Prova: Seja $\overline{AD}$ a corda da circunferência circunscrita a ABC passando em seu centro. Mostraremos que $\frac{c}{\text{sen}\,|\widehat{C}|} = 2R$.



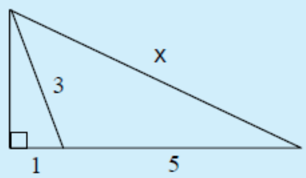
Há duas possibilidades: $\overline{AB}$ passa no centro da circunferência ou não. Se $\overline{AB}$ passa no centro, então $B = D$, $c = 2R$ e $\widehat{C}$ é reto (pois subtende uma semi-circunferência). Nesse caso, sen $|\widehat{C}| = 1$ e, portanto, $\frac{c}{\text{sen}\,|\widehat{C}|} = 2R$. Suponhamos que $\overline{AB}$ não passa no centro. Temos que $\widehat{C}$ e $\widehat{D}$ subtendem o mesmo arco e, por conseguinte, são congruentes ou $\widehat{C}$ e $\widehat{D}$ são suplementares. De qualquer modo, teremos sen $\widehat{C}$ = sen $\widehat{D}$. Desde que o triângulo ABD é retângulo em B, vem que sen $|\widehat{D}| = \frac{c}{2R}$. Posto que sen sen $\widehat{C}$ = sen $\widehat{D}$, segue-se que sen $|\widehat{C}| = \frac{c}{2R}$ e daí $\frac{c}{\text{sen}\,|\widehat{C}|} = 2R$. De modo inteiramente análogo, utilizando diâmetros partindo de B e de C, podemos demonstrar que $\frac{a}{\text{sen}\,|\widehat{A}|} = 2R$ e $\frac{b}{\text{sen}\,|\widehat{B}|} = 2R$.

SÍNTESE DA UNIDADE

Começamos enunciando o Teorema de Pitágoras com a prova dada por Euclides, o qual utilizou a figura que lembra um moinho de vento. Em seguida, apresentamos relações métricas num triângulo retângulo, deduzidas como aplicação dos casos de semelhança de triângulos. Demos o Teorema da Bissetriz Interna e Potência de um Ponto. Explanamos sobre trigonometria no triângulo retângulo, deduzindo os valores das funções trigonométricas seno e cosseno nos ângulos que medem 30o, 45o, 60o, 120o, 135o e 150o. Por fim, enunciamos e demonstramos as Leis do Seno e do Cosseno.

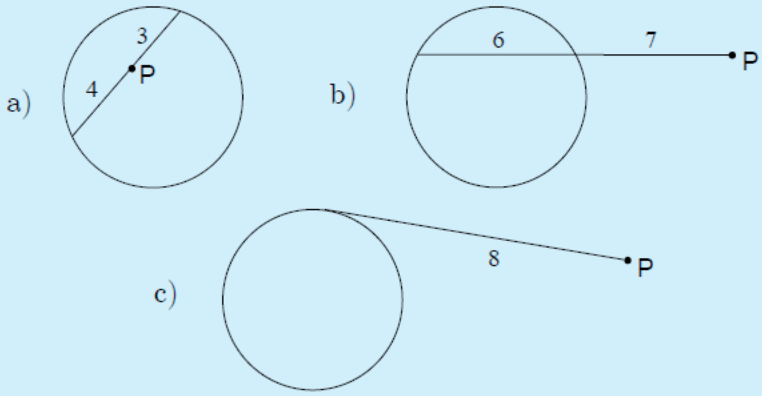
ATIVIDADES DE AVALIAÇÃO

1. Determine a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos medem 9cm e 12cm.
2. A hipotenusa de um triângulo retângulo vale 13cm e um dos catetos 12cm. Calcule a medida do outro cateto.
3. Na figura a seguir, calcule x.



4. Uma caixa mede 12cm de comprimento, 4cm de largura e 3cm de altura. Quanto mede a diagonal de cada uma das faces da caixa?
5. Num triângulo retângulo um cateto mede 12cm e a mediana relativa à hipotenusa mede 6,5 cm. Determine a medida do outro cateto.
6. Determine as projeções dos catetos sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo sabendo que eles medem 6cm e 8cm. Ache também a altura relativa à hipotenusa.
7. Os catetos de um triângulo retângulo medem 16cm e 12cm. Determine os valores do seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante dos ângulos agudos desse triângulo.
8. Num triângulo retângulo, a hipotenusa mede 10cm e o seno de um dos ângulos vale 0,8. Determine a medida dos catetos.
9. Dois lados de um triângulo medem 5 e 8 unidades de comprimento e o ângulo formado por eles mede 60º. Determine a medida do terceiro lado.
10. Suponha que, em um triângulo, o quadrado de um lado é igual à soma dos quadrados dos outros dois menos o produto desses lados. Determine o ângulo interno que esses lados formam.
11. Calcule a altura de um trapézio retângulo de bases 10 e 15 circunscrito a uma circunferência.
12. Mostre que é retângulo todo triângulo cujos lados medem $3n$, $4n$ e $5n$, sendo n um número real positivo qualquer.
13. Sejam $a > b > 0$. Mostre que é retângulo um triângulo cujos lados medem $2ab$, $a^2 - b^2$ e $a^2 + b^2$.
14. Um observador vê um edifício, situado num terreno plano, sob um ângulo de 60º. Afastando-se do edifício mais 20m, passará a vê-lo sob um ângulo de 45º. Determine a altura do edifício.

15. Determine a potência do ponto P em cada caso a seguir.



16. Calcule a potência de um ponto em relação a uma circunferência de raio medindo 4 sabendo que a distância de P ao centro é igual a 3.

17. Sejam P um ponto exterior a uma circunferência de centro O e raio r e d a distância de P a O. Demonstre que $potP = r^2 - d^2$.

18. Sejam P um ponto interior a uma circunferência de centro O e raio r e d a distância de P a O. Demonstre que $potP = r^2 - d^2$.

19. Seja α uma circunferência de centro O e raio r e A um ponto no exterior de α. Suponha que uma reta passando por A tangencia α num ponto P. Seja $\{B\} = \overline{AO} \cap \alpha$. Sabendo-se que $AP = 2r$, calcule AB em função de r.

20. Seja $\overline{AB}$ medindo $3r$, tangente em A a uma circunferência de raio r. Traça-se por B a tangente $\overleftrightarrow{BC}$ que tem C por ponto de contato, em que $C \neq A$. Calcule, em função de r, a distância de C à reta $\overleftrightarrow{AB}$.

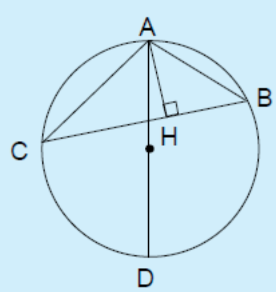
21. Seja P um ponto exterior a uma circunferência α de centro O e raio r tal que $OP = \sqrt{3}r$. Uma secante passando por P intercepta α nos pontos A e B, em que $A \in \overline{PB}$. Sabendo que $BA = r$, determine AB.

22. Use potência de um ponto para demonstrar o Teorema de Pitágoras.

23. Sejam a, b e c os lados de um triângulo tais que $a \geq b \geq c$. Mostre que esse triângulo é acutângulo se $a^2 < b^2 + c^2$ e é obtusângulo se a $a^2 > b^2 + c^2$.

24. Determine a natureza do triângulo, quanto aos ângulos, cujos lados medem 16, 19 e 33.

25. 25. Na figura, $\overline{AD}$ é diâmetro e $\overline{AH}$ é a altura do triângulo ABC em relação ao lado $\overline{BC}$. Sendo $AB = 6$, $AC = 10$ e $AD = 30$, calcule AH.



26. Um observador estando a 25m de um prédio o visualiza sob um certo ângulo. Afastando-se, na direção perpendicular ao prédio, mais 50m, o ângulo de visualização é a metade do anterior. Qual é a altura do prédio?

27. Sejam ABC um triângulo, em que $AB = AC$, e M um ponto entre B e C. Demonstre que $AB^2 - AM^2 = (MB)(MC)$.

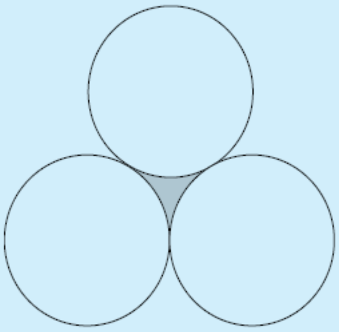
28. Um trapézio retângulo de bases a e b possui diagonais perpendiculares. Calcule sua altura h em função de a e b.

29. Se a e b são dois lados de um triângulo e θ é o ângulo formado por esses lados, demonstre que a área do triângulo é igual a $\frac{1}{2}ab\operatorname{sen}\theta$.

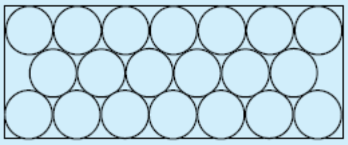
30. Sejam a, b e c os lados de um triângulo. Expresse a em função de b e c sabendo que a área do triângulo é igual a $\frac{2}{5}bc$..

31. Mostre que a área de um quadrilátero qualquer é igual à metade do produto de suas diagonais vezes o seno do ângulo que elas formam.

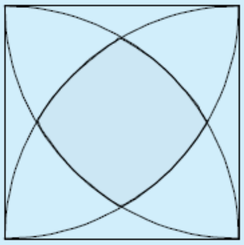
32. Três circunferências de raio unitário são tangentes exteriormente duas a duas, conforme mostra a figura a seguir. Calcule a área da região sombreada.



33. A secção transversal de uma carteira de cigarros é um retângulo que acomoda exatamente os cigarros como na figura. Sendo r o raio dos cigarros, calcule as dimensões do retângulo.



34. Calcule a área da região sombreada em função do lado a do quadrado.



35. Sejam $0 < a < x$. Discuta a natureza do triângulo, quanto aos ângulos, cujos lados medem $x - a$, x e $x + a$.

36. Três lados correspondentes de três polígonos semelhantes formam um triângulo. Demonstre que o triângulo é retângulo se, e somente se, a área de um dos polígonos é igual à soma das áreas dos outros dois.

37. Seja ABC um triângulo retângulo em A e P um ponto situado entre B e C. De P, traçamos uma paralela ao cateto $\overline{AC}$ até o outro cateto num ponto Q. Se $a = BC$, $b = AC$ e $c = AB$, $a' = PB$, $b' = PQ$ e $c' = BQ$, demonstre que $aa' = bb' + cc'$.

38. Seja ABC um triângulo em que $AB \neq AC$ e seja r a reta contendo a bissetriz do ângulo externo $\hat{A}$. Se $P \in r \cap \overleftrightarrow{BC}$, mostre que

$$\frac{AB}{BP} = \frac{AC}{CP}$$

39. 39. Sejam $2p$ o perímetro e h a altura relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo. Demonstre que sua área S obedece à fórmula

$$S = \frac{hp^2}{h + 2p}$$

40. 40. Sejam a, b e c os lados de um triângulo e p seu semi-perímetro. Demonstre que sua área S obedece à fórmula (fórmula de Heron)

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

41. Demonstre que a área S de um quadrilátero inscritível de lados a, b, c e d e semi-perímetro p é dada pela fórmula

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

Prove ainda que se o quadrilátero for também circunscritível, então $S = \sqrt{abcd}$

Unidade 10

Polígonos Regulares

Objetivos:

- Saber por que todo polígono regular é inscritível e circunscritível.
- Saber definir os elementos principais de um polígono regular tais como centro e zpótema.
- Conhecer a fórmula que fornece o comprimento da circunferência e saber aplicá-la na resolução de problemas.
- Saber estimar o valor de π.
- Saber medir ângulos em radianos e calcular área de setor circular.

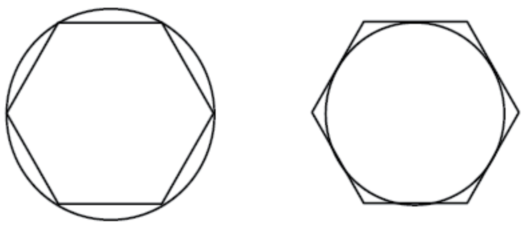
10.1. POLÍGONOS REGULARES

Recordemos que um polígono é regular se é equiângulo e equilátero, isto é, se seus ângulos têm a mesma medida e seus lados também.

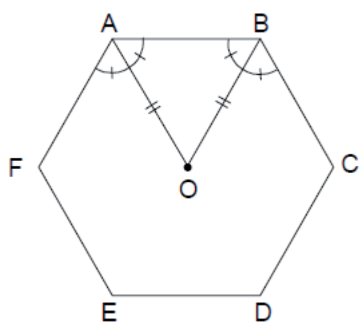
Sabemos ainda que nem todo polígono equilátero é equiângulo e vice-versa. Entretanto, todo triângulo equilátero é equiângulo e todo triângulo equiângulo é equilátero.

Veremos a seguir uma importante propriedade acerca dos polígonos regulares. Demonstraremos que todo polígono regular é inscritível e circunscritível, ou seja, há uma circunferência que contém seus vértices e há outra que tangencia seus lados.

Trabalharemos com um hexágono regular na demonstração.

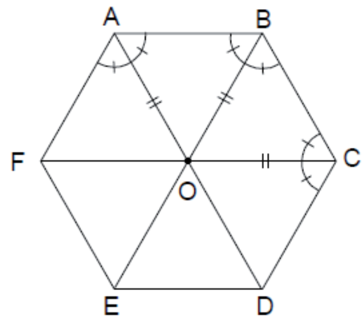


O argumento que utilizaremos é aplicável a qualquer polígono regular. Considere um hexágono regular de vértices *A, B, C, D, E* e *F*.



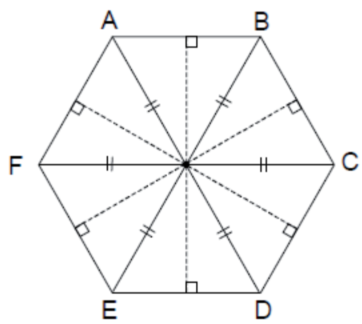
Seja O o encontro das bissetrizes dos ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$. Como os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ têm mesma medida, segue-se que os ângulos $O\hat{A}F$, $O\hat{A}B$, $O\hat{B}A$ e $O\hat{B}C$ são congruentes. Conseqüentemente, o triângulo OAB é isósceles e, portanto, $OA = OB$.

Tracemos agora os segmentos $\overline{OC}$, $\overline{OD}$, $\overline{OE}$ e $\overline{OF}$.



Pelo caso L.A.L. de congruência de triângulos decorre que os triângulos OAB e OBC são congruentes, pois $\overline{OB}$ é lado comum, $AB = BC$ e $O\hat{B}A \equiv O\hat{B}C$. Como conseqüência, temos que $OC = OA$ e $O\hat{C}B \equiv O\hat{A}B$. Sendo os ângulos do polígono congruentes, segue-se que $O\hat{C}D \equiv O\hat{C}B$.

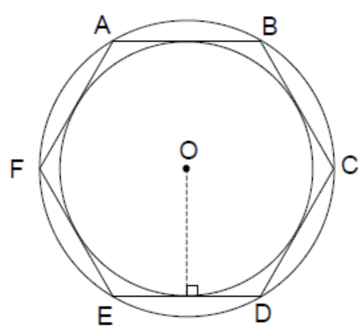
Pelo caso L. A. L. de congruência de triângulos, decorre que os triângulos *OBC* e *OCD* são congruentes. Enfim, prosseguindo com o mesmo argumento anterior, chegaremos que os triângulos *OAB, OBC, OCD, ODE, OEF* e *OFA* são congruentes entre si e são isósceles.



Por conseguinte, *O* é eqüidistante dos vértices *A, B, C, D, E* e *F* do polígono. Logo, é centro de uma circunferência que passa nos vértices do polígono. Outra conseqüência é que esses seis triângulos isósceles têm alturas relativas, respectivamente, aos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$ e $\overline{FA}$ com mesma medida. Portanto, O também é centro de uma circunferência que tangencia os lados do polígono.

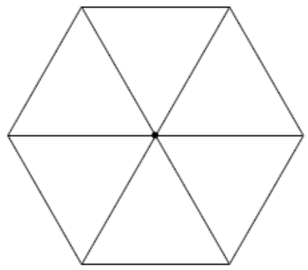
SAIBA MAIS

Observe que o raio da circunferência circunscrita ao polígono é a distância do centro a qualquerde seus vértices ao passo que o raio da circunferência inscrita nele é a distância do centro a qualquer de seus lados.



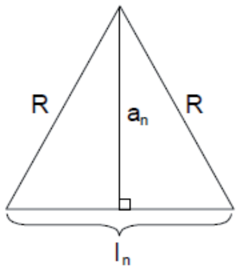
Definição 63: *Chamaremos de centro do polígono o centro O das duas circunferências e de apótema do polígono o raio da circunferência inscrita nele, isto é, o raio da circunferência que tangencia seus lados.*

Agora, atente para o seguinte: todo polígono regular de n lados se decompõe em n triângulos isósceles e congruentes entre si.



Eles têm um vértice comum, que é o centro do polígono, e os outros vértices são os vértices do polígono. Assim, a área do polígono é igual a n vezes a área de um desses triângulos.

Denotando por a_n, l_n e R, respectivamente, o apótema, o lado e o raio da circunferência circunscrita ao polígono, então cada um desses triângulos tem dois lados medindo R e um medindo l_n, sendo a_n a altura relativa ao lado l_n.



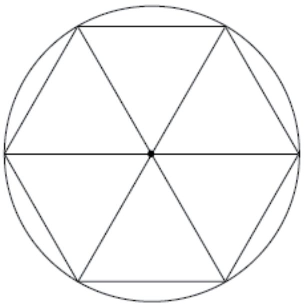
Assim sendo, a área de cada triângulo da decomposição é igual $\frac{l_n \cdot a_n}{2}$. Conseqüentemente, a área do polígono é igual a $\frac{n \cdot l_n \cdot a_n}{2}$. Entretanto, $\frac{n \cdot l_n}{2}$ é o semi-perímetro do polígono, logo, sua área é igual a seu semi-perímetro vezes seu apótema, isto é, seu semi-perímetro multiplicado pelo raio da circunferência inscrita nele.

Enfim, denotando a área do polígono regular de n lados por S_n e por p_n seu semi-perímetro, temos:

$$S_n = p_n \cdot a_n$$

10.2. Comprimento da circunferência

Agora, imaginemos o seguinte: fixemos a circunferência circunscrita ao polígono e aumentemos o número n de lados do polígono. Você concorda que a área do polígono, o semi-perímetro e o apótema irão se aproximar, respectivamente, da área do disco, da metade do comprimento da circunferência e do raio R?



SAIBA MAIS

Aí temos a fórmula para calcularmos o comprimento de uma circunferência em função de seu raio.

SAIBA MAIS

Ludolph van Ceulen (1540-1610) publicou em 1596 uma aproximação com 20 casas decimais obtida a partir de um polígono regular de 15 lados e dobrando esse número de lados 37 vezes. Ele foi mais longe em seus cálculos, utilizando um número de lados ainda maior, conseguiu uma estimativa com 35 casas decimais. Esta aproximação de π encontra-se gravada em sua lápide.

A estimativa do valor de π foi um problema abordado por vários matemáticos no transcorrer da história.

Se você concorda e eu espero que sim, então parece-me razoável, dado que $S_n = p_n \cdot a_n$, admitir que $S = \frac{C}{2} \cdot R$, em que S é a área do disco e C é o comprimento da circunferência, uma vez que S_n aproxima-se de S, p_n de $\frac{C}{2}$ e a_n de R quando aumentamos n.

Sabemos que $S = \pi R^2$, em que π é a área do disco de raio unitário. Assim, substituindo S por πR^2 na relação $S = \frac{C}{2} \cdot R$, obteremos $\pi R^2 = \frac{C}{2} \cdot R$ e daí teremos:

$$C = 2\pi R$$

O número π vale, aproximadamente, 3,1416.

Veremos, a seguir, como é que chegamos a esse valor de π. Antes, porém, vamos contar um pouco de sua história.

O mais extenso dos papiros egípcios de natureza matemática a chegar até nós é o papiro de Ahmes que leva o nome do escriba que o copiou por volta de 1650 a.C. Ele tem 0,30 m de altura e 5 m de comprimento. Nele, $4\left(\frac{8}{9}\right)^2$ é o valor aproximado atribuído a π.

Em 1936, um grupo de tabletas matemáticas foi desenterrado em Susa, a 300km de Babilônia. Nelas, o valor aproximado de π é $\frac{31}{8}$. Usando polígono regular de 96 lados, Arquimedes estimou em $\frac{22}{7}$ o valor de π. Ptolomeu (nascido pelo fim do 1º século) em seu livro “Almajesto” atribuiu $\frac{377}{120}$ a π, valor este que pode ter sido dado por Apolônio (262-190 a.C.) nascido em Perga.

No terceiro século, o matemático chinês Liu Hui obteve 3,14159 para aproximação de π usando polígono regular de 3072 lados. Tsu Ch’ung-chih (430-501), também chinês, estabelceu $\frac{355}{113}$ para estimativa de π e esta foi a melhor aproximação obtida até o século XV. Curioso é que $\frac{355}{113}$ é obtido subtraindo-se o numerador e o denominador da aproximação arquimediana, respectivamente, do numerador e denominador da aproximação de Ptolomeu, qual seja, $\frac{355}{113} = \frac{377-22}{120-7}$.

O matemático árabe Al-Kashi (morreu em 1436) encontrou que $2\pi \cong 6,2831853071795865$. Até o final do século XVI esta foi a melhor aproximação de π.

Vale salientarmos que a estimativa de π tem mais valor computacional do que teórico, de modo que uma expressão exata seria mais interessante do ponto de vista teórico. Foi François Viète (1540-1603) o primeiro a estabelecer uma fórmula numérica e precisa para π, qual seja:

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdots$$

Mais tarde, usando cálculo integral, o matemático inglês John Wallis (1616-1703) estabeleceu que

$$\frac{2}{\pi} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdots}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdots}$$

Leibniz (1646-1716), utilizando série infinita, encontrou que

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

sendo esta uma de suas primeiras descobertas matemáticas. Mas, essa expressão é apenas um caso particular da "série de Gregory"

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

dada antes por James Gregory (1638-1675).

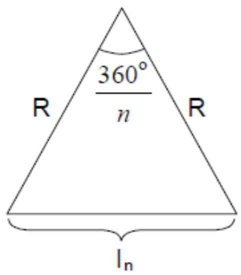
Foi Johann Heinrich Lambert (1728-1777), suíço alemão, quem deu a primeira prova, apresentada à Academia de Berlim em 1761, de que π é irracional. Um século depois, mais precisamente em 1882, Lindemann (1852-1939) provou que π é transcendente em seu artigo "*Über die Zahl* π".

Veja a seguir uma aproximação de π com 100 casas decimais exatas.

$\pi \cong 3{,}1415926535897932384626433832795028841971693993751058209749$
$44592307816406286208998628034825342117068.$

Vamos agora apresentar uma maneira, com o auxílio de uma máquina calculadora científica, de estimar o valor de π.

A área de um triângulo também é dada pela metade do produto de dois lados vezes o seno do ângulo formado por esses lados. Conforme já vimos, um polígono regular de n lados está decomposto em n triângulos isósceles e congruentes entre si cujos lados são dois com medida R e um com medida l_n, sendo R o raio da circunferência circunscrita e l_n seu lado.



O ângulo formado pelos lados iguais a R mede $\frac{360°}{n}$.

Correto?

Assim, a área de cada um desses triângulos é igual a $\frac{1}{2}R^2 \text{sen}\,\frac{360°}{n}$, donde, a área do polígono é igual a n vezes esse valor, isto é, $\frac{n}{2}R^2 \text{sen}\,\frac{360°}{n}$.

Quanto maior for n, mais a área do polígono se aproxima do valor exato da área do disco.

Sabemos que π é a área do disco de raio unitário. Logo, $\frac{n}{2}R^2 \text{sen}\,\frac{360°}{n}$ com $R = 1$ estará próximo de π para valores grandes de n.

Concorda?

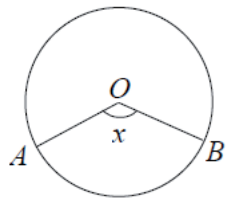
Por conseguinte, $\pi \cong \frac{n}{2} \cdot \text{sen}\,\frac{360°}{n}$. A tabela a seguir, confeccionada com o auxílio de uma calculadora científica, apresenta valores aproximados de π em função de alguns valores de n. Quanto maior for n, mais $\frac{n}{2} \cdot \text{sen}\,\frac{360°}{n}$ estará próximo do valor exato de π.

n	$\frac{n}{2} \cdot \text{sen}\,\frac{360°}{n}$
6	2,5980762
12	3
24	3,1058285
48	3,1326286
96	3,1393502

n	$\frac{n}{2} \cdot \text{sen}\,\frac{360°}{n}$
192	3,1410319
500	3,1415099
1000	3,1415719
10000	3,1415924

10.3. Medida de um ângulo em radianos

Considere um ângulo central, côncavo ou convexo, de uma circunferência de centro O e raio R. Seja $\widehat{AB}$ o arco que esse ângulo subtende. Indiquemos por C o comprimento desse arco.

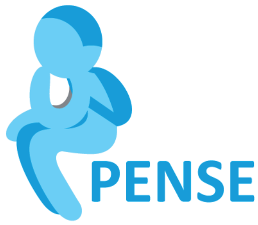


Definimos a *medida do ângulo central em radianos* como sendo a quantidade de vezes que o comprimento C do arco contém o raio R da circunferência, ou seja, se x é essa medida, então

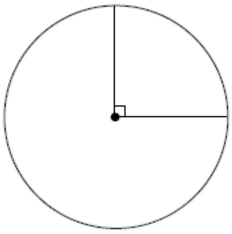
$$x = \frac{C}{R}$$

Por exemplo, uma volta completa, que corresponde a um ângulo de 360º, em radianos, vale $x = \frac{2\pi R}{R}$, isto é, 2π radianos, já que $2\pi R$ é o comprimento total da circunferência.

Vejamos. O comprimento do arco associado ao ângulo central de 90º é $\frac{1}{4}$ do comprimento total da circunferência. De acordo? Assim sendo, a medida de um ângulo de 90º, em radianos, é igual a $x = \frac{\frac{\pi}{2}R}{R} = \frac{\pi}{2}$.



Outro exemplo, um ângulo de 90º, em radianos, vale quanto?



Enfim, as medidas em graus e em radianos são diretamente proporcionais. Se x é a medida de um ângulo em radianos e y é a medida do mesmo ângulo em graus, então $x = k \cdot y$, sendo k a constante de proporcionalidade. O valor de k podemos determinar do seguinte modo: sabemos que quando $y = 360°$, então $x = 2\pi$, logo, $2\pi = k \cdot 360°$ e daí $k = \frac{2\pi}{360°}$. Por conseguinte, temos:

$$x = \frac{2\pi}{360°} \cdot y$$

Essa relação nos permite passar de uma medida para outra. Ela também pode ser expressa do seguinte modo:

$$\frac{x}{y} = \frac{2\pi}{360°}$$

Nessa notação, lemos: x está para y assim como 2π está para 360º.

Estamos aí diante de uma regra de três simples.

Podemos ainda, a partir dessa relação e da relação $x = \frac{C}{R}$, expressar o comprimento de um arco em função do raio da circunferência e da medida do ângulo central em graus. Substituindo x por $\frac{C}{R}$ em $x = \frac{2\pi}{360^\circ} \cdot y$, obtemos: $\frac{C}{R} = \frac{2\pi}{360^\circ} \cdot y$. Daí,

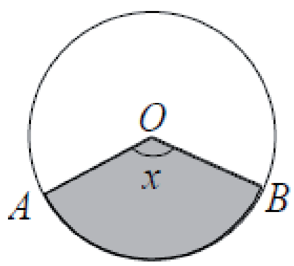
$$C = \frac{2\pi}{360^\circ} \cdot y \cdot R$$

Essa relação também pode ser expressa em termos de uma proporção:

$$\frac{C}{y} = \frac{2\pi R}{360^\circ}$$

10.4. Área de um setor circular

Seja $\widehat{AB}$ um arco de uma circunferência de centro O e raio R. A interseção do ângulo central que subtende esse arco com o disco chama-se *setor circular* determinado por $\widehat{AB}$.



Nosso propósito é determinar a área S desse setor.

Tenho certeza que sim. Uma vez aceito esse raciocínio, teremos que $S = k \cdot x$, em que x é a medida do ângulo central em radianos e k é a constante de proporcionalidade.

Entretanto, $S = \pi R^2$ para $x = 2\pi$. Logo, $\pi R^2 = k \cdot 2\pi$, donde, $k = \frac{R^2}{2}$. Assim sendo, $S = \frac{R^2}{2} \cdot x$, ou seja,

$$S = \frac{x}{2} \cdot R^2$$

Como seria a fórmula da área do setor circular se a medida do ângulo central fosse dada em graus?

Vejamos. Seja y a medida do ângulo central em graus. Sabemos que $x = \frac{2\pi}{360^\circ} \cdot y$. Assim, substituindo x por $\frac{2\pi}{360^\circ} \cdot y$ na fórmula obtida há pouco, obteremos:

$$S = \frac{2\pi}{360^\circ} \cdot y \cdot R^2$$

PENSE

Você não acha razoável admitirmos que S é diretamente proporcional à medida do ângulo central?

ANOTE

Aí temos a fórmula da área de um setor circular em função da medida do ângulo central associado, em radianos, e do raio do disco.

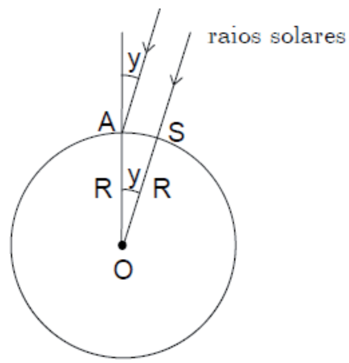
10.5. Cálculo do raio de nosso planeta

Havia um período em que, na cidade de Siene, os raios solares incidiam, ao meio-dia, verticalmente sobre nosso planeta. Chegou-se a essa conclusão devido a imagem do sol ser vista refletida nos poços mais profundos.

DICA

Vamos mostrar como foi que o matemático Eratóstenes (276 - 196 a. C.), de Alexandria, calculou o raio de Terra.

No mesmo instante, em Alexandria, os raios solares caíam formando um ângulo y = 7,2° com a vertical. Na figura a seguir, A representa a cidade de Alexandria, S a cidade de Siene e R o raio da Terra.



Como os raios solares nos chegam paralelos, então o ângulo central na figura também mede 7,2°. Calculava-se que a distância entre as duas cidades era de 925km. Empregando-se a fórmula $C = \frac{2\pi}{360^\circ} \cdot y \cdot R$, que nos fornece o comprimento de arco em função do ângulo central dado em graus e do raio, obtém-se:

$$925 = \frac{2\pi}{360^\circ} \cdot 7,2^\circ \cdot R$$

Daí, chega-se que

$$R \cong 7365\text{km}$$

ANOTE

Hoje, é sabido que o raio da Terra no equador é de 6378km. Portanto, o resultado a que chegou Erastóstenes está próximo do atual.

SÍNTESE DA UNIDADE

Demonstramos que todo polígono regular é inscritível e circunscritível. Conceituamos centro e apótema de um polígono regular. Deduzimos a fórmula do comprimento de uma circunferência e fizemos uma estimativa do valor de π, utilizando polígonos regulares. Estabelecemos a medida de ângulos em radianos e deduzimos fórmulas que permitem calcular a área de um setor circular. Ao final, mostramos como Eratóstenes calculou o raio do nosso planeta.

ATIVIDADES DE AVALIAÇÃO

1. As rodas dianteiras de um caminhão têm 50cm de raio e dão 25 voltas no mesmo tempo em que as rodas trazeiras dão 20 voltas. Determine o diâmetro das rodas trazeiras.
2. Demonstre que são semelhantes dois polígonos regulares de n lados.
3. Expresse l_3, l_4 e l_6 em função do raio R da circunferência circunscrita aos respectivos polígonos regulares.

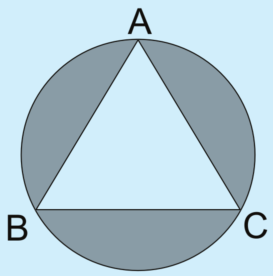
4. Qual é a razão entre o perímetro de um triângulo equilátero com altura igual ao raio de um círculo e o perímetro do triângulo equilátero inscrito nesse círculo?

5. Sendo R o raio da circunferência circunscrita ao polígono regular de n lados, mostre que

$$a_n = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - l_n^2}$$

6. Expresse a_3, a_4 e a_6 em função do raio R da circunferência circunscrita aos respectivos polígonos regulares.

7. O apótema do triângulo equilátero ABC na figura abaixo mede $\sqrt{3}$. Calcule a área da região sombreada.



8. Expresse as áreas, em função do raio R da circunferência circunscrita, dos polígonos regulares, respectivamente, de 3, 4 e 6 lados.

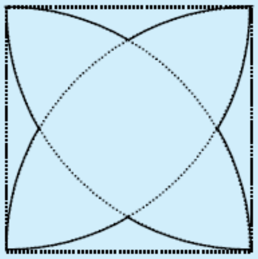
9. Seja L_n o lado do polígono regular de n lados circunscrito a uma circunferência de raio R. Demonstre que

$$L_n = \frac{l_n}{a_n} \cdot R$$

10. Expresse L_3, L_4 e L_6 em função do raio R da circunferência inscrita nos respectivos polígonos regulares.

11. Seja A_n a área do polígono regular de n lados circunscrito a uma circunferência de raio R. Expresse A_3, A_4 e A_6 em função de R.

12. Calcule, em função do lado l do quadrado $ABCD$, o perímetro da figura assinalada.



13. Demonstre que $l_{2n} = \sqrt{2R(R - a_n)}$, sendo R o raio da circunferência circunscrita aos respectivos polígonos regulares.

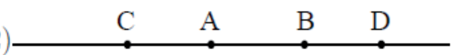
14. Expresse l_{10} e l_5 em função do raio R da circunferência circunscrita aos respectivos polígonos regulares.

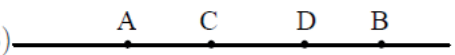
15. Seja $A_1A_2 \cdots A_n$ um polígono regular inscrito numa circunferência de raio unitário. Mostre que $(A_1A_2) \cdots (A_1A_n) = n$ para n = 3, 4, 5 e 6. (Informação: esse resultado vale para qualquer que seja n.)

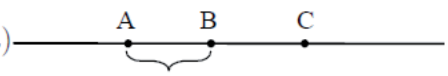
Respostas

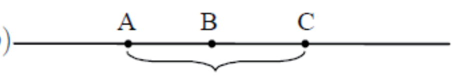
UNIDADE 1

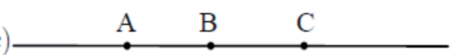
1) 3.

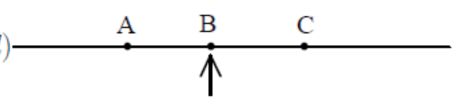
2) 

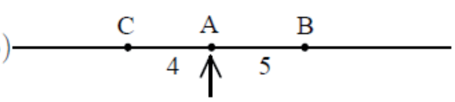
3) 

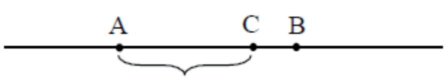
4) *a*) 

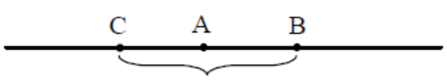
b) 

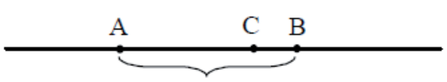
c) 

d) 

5) 

ou 

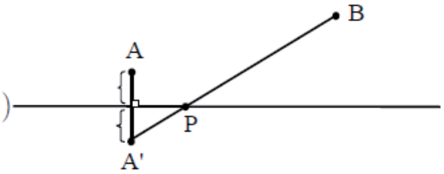


ou 

6) $x = 34^o40'$. 7) $x = 50^o$. 8) $x = 50^o$. 9) $x = 110^o$. 10) $x = 40^o$ e $y = 20^o$. 11) $x = 30^o$ e $y = 10^o$. 12) 10. 13) $\frac{n(n-1)}{2}$. 14) 12h 20 min.

UNIDADE 2.

1) Não. 2) 2. 5) Aquele que se opõe ao ângulo obtuso. 7) $c < a + b$. 8) 360º. 9) 36º.

21)


UNIDADE 3.

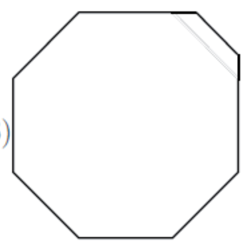
2) 105º. 3) x = 50º. 4) 60º. 5) a = 50º, b = 80º e c = 50º. 6) x = 12º e y = 156º

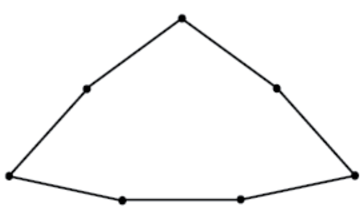
UNIDADE 4.

1) Um retângulo não quadrado. 2) Um losango não quadrado. 5) 15 e 9. 6) 100º e 80º. 7) 60º e 120º. 8) 7. 9) 16 e 24. 10) 4cm. 11) 40º e 140º. 12) 40º e 80º. 13) 25cm. 23) 4cm. 32) 30º (Sugestão: Por D, considere a paralela a $\overleftrightarrow{BC}$. Seja F o ponto de interseção dessa paralela com $\overline{AB}$. Seja $G \in \overline{BD} \cap \overline{CF}$. Mostre que DFG é equilátero e que EFG é isósceles. Conclua que $\overrightarrow{DE}$ é bissetriz de $F\widehat{D}G$.).

UNIDADE 5.

1) 120º. 2) $d_6 = 9$, $d_7 = 14$, $d_8 = 20$, $d_9 = 27$ e $d_{10} = 35$. 3) n = 16. 4) n = 11. 5) n = 14. 6) Denotando por S_n a soma dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados, temos: $S_5 = 540°$, $S_6 = 720°$, $S_7 = 900°$, $S_8 = 1080°$, $S_9 = 1260°$ e $S_{10} = 1440°$ 7) Denotando por I_n a medida do ângulo interno de um polígono convexo equiângulo de n lados, temos: $I_3 = 60°$, $I_4 = 90°$, $I_5 = 108°$, $I_6 = 120°$, $I_7 = 900°/7 = 128,571428571428... \cong 128°34'17''$, $I_8 = 135°$.. 8) n = 15. 9) n = 18. 10) 44. 11) 27. 12) 1800º. 13) 45º. 14) $\frac{360°}{n}$. 15) 135.

16)


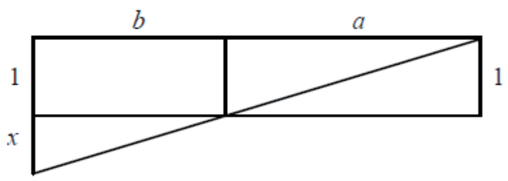
17)


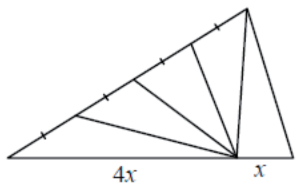
UNIDADE 6.

1) A mediatriz de uma corda é o conjunto dos pontos equidistantes de suas extremidades. Como o centro é equidistante das extremidades de qualquer corda, logo, pertence à mediatriz da corda. 2) No ponto médio da hipotenusa. 4) a) exteriores. b) uma é interior à outra. c) secantes. d) secantes. e) uma é interior à outra. 5) a) 40º. b) 83º. c) 40º. 6) 230º. 7) 100º. 8) 20º. 9) 59º e 31º. 10) 5/9.

UNIDADE 7.

1) 30cm². 2) 9m². 3) 48m². 4) 30cm². 5) 10cm². 6) 21cm². 7) Se b e c são seus catetos, então sua área vale $bc/2$. 8) $[(\sqrt{2}-1)100]\% \cong 41\%$. 9) 44%. 10) $9\sqrt{3}\text{cm}^2$ 11) $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$.

12) 

15) 

$$18)\ S_{AEF} = \frac{S_{ABC}}{21}.$$

UNIDADE 8.

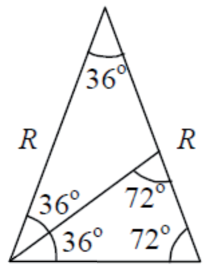
1) 8. 2) $CD = 56$ e $CE = 48$. 3) 5. 4) 92. 5) 79/4. 6) 3/2. 7) $l = 4$. 9) $200\pi\text{cm}^2$ 10) $\left(\frac{\pi-2}{2}\right)a^2$. 11) $4-\pi$. 12) 3 e 6. 15) x = 45. 16) x = 42 e y = 45. 19) 25. 20) $\left(\frac{n-1}{2}\right)a$..

UNIDADE 9.

1) 15. 2) 5. 3) $x = 2\sqrt{11}$. 4) 5, $3\sqrt{17}$ e $4\sqrt{10}$. 5) 5. 6) projeções: 18/5 e 32/5; altura: 24/5. 7) $\operatorname{sen}\alpha = 3/5$, $\cos\alpha = 4/5$, $\operatorname{tg}\alpha = 3/4$, $\operatorname{cotg}\alpha = 4/3$, $\sec\alpha = 5/4$ e $\operatorname{cosec}\alpha = 5/3$; $\operatorname{sen} b = 4/5$, $\cos b = 3/5$, $\operatorname{tg} b = 4/3$, $\operatorname{cotg} b = 3/4$, $\sec b = 5/3$ e $\operatorname{cosec} b = 5/4$. 8) 6 e 8. 9) 7. 10) 60º. 11) 12. 14) $10\left(3+\sqrt{3}\right)$. 15) a) 12. b) 91. c) 64. 16) 7. 19) $\left(\sqrt{5}-1\right)r$. 20) $(9/5)r$. 21) r. 24) Obtusângulo. 25) 2. 26) $25\sqrt{3}\text{m}$. 28) $h = \sqrt{ab}$. 30) $a = \sqrt{b^2+c^2-\frac{6}{5}bc}$. 32) $\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}$. 33) $14r$ e $2\left(1+\sqrt{3}\right)r$. 34) $\left(1-\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}\right)a^2$. 35) Obtusângulo para $2a < x < 4a$; retângulo para $x = 4a$ e acutângulo para $x > 4a$.

UNIDADE 10.

1) 125cm. 3) $l_3 = \sqrt{3}R$, $l_4 = \sqrt{2}R$ e $l_6 = R$. 4) 2/3. 6) $a_3 = \frac{1}{2}R$, $a_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}R$ e $a_6 = \frac{\sqrt{3}}{2}R$. 7) $\left(12\pi - 9\sqrt{3}\right)$cm. 8) Se λ_n é a área do polígono regular de n lados inscrito na circunferência de raio R, então $\lambda_3 = \frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$, $\lambda_4 = 2R^2$ e $\lambda_6 = \frac{3\sqrt{3}}{2}R^2$. 10) $L_3 = 2\sqrt{3}R$, $L_4 = 2R$ e $L_6 = \frac{2\sqrt{3}}{3}R$. 11) $A_3 = 3\sqrt{3}R^2$, $A_4 = 4R^2$ e $A_6 = 2\sqrt{3}R^2$. 12) $(4/3)\pi l$. 14) $l_{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}R$ e $l_5 = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}R$ (Sugestão: para calcular l_{10}, observe a figura a seguir e use o Teorema da bissetriz interna.).



REFERÊNCIAS

1. BARBOSA, João Lucas Marques - **Geometria Euclidiana Plana.** Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 1985.

2. BIRKHOFF, George David e BEATLEY, Ralph - **Basic Geometry**. Chelsea, New York, 1959.

3. BLUMENTHAL, Leonard M. **Geometria Axiomatica**. Aguilar, Madrid, 1965

4. BOYER, Carl B. - **História da Matemática.** Editora Edgard Blücher LTDA., São Paulo, 1974.

5. CHAPUT, Ignace (F.I.C.) - **Elementos de Geometria.** F. Briguiet & Cia., Rio de Janeiro, 1964.

6. COXETER, H. S. M. - **Introduction to Geometry.** John Wiley & Sons, Inc., New York, 1965.

7. COXETER, H. S. M. e GREITZER, S. L. - **Geometry Revisited.** Random House, New York, 1967.

8. DOLCE, Osvaldo e POMPEO, José Nicolau - **Geometria Plana vol.9.** Atual Editora LTDA., São Paulo, 1980.

9. HALMOS, Paul R. - **Teoria Intuitiva de los Conjuntos.** Compañia Editorial Continental S.A., México, 1967.

10. HILBERT, David - **The Foudations of Geometry.** The Open Court Publishing Co., Illinois, 1947.

11. LIMA, Elon Lages - **Curso de Análise vol. 1.** Editora Edgard Blücher LTDA., São Paulo, 1976.

12. MORGADO, A. C., WAGNER, E. e JORGE, M. - **Geometria I.** Livraria Francisco Alves Editora S.A., Rio de Janeiro, 1974.

13. MORGADO, A. C., WAGNER, E. e JORGE, M. - **Geometria II.** Livraria Francisco Alves Editora S.A., Rio de Janeiro, 1974.

DADOS DO AUTOR

Manoel Ferreira de Azevedo Filho

Possui mestrado em Matemática pela Universidade Federal do Ceará (1981). Atualmente é professor aposentado da Universidade Federal do Ceará, professor de ensino superior da Faculdade Farias Brito e professor adjunto da Universidade Estadual do Ceará.